

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MAICON FELIPE MALACARNE

**O INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG EMPREGADO NO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA DE
ESTRUTURAS**

CURITIBA

2018

MAICON FELIPE MALACARNE

**O INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG EMPREGADO NO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA DE
ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do grau de “Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia”, área de concentração em Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

Coorientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

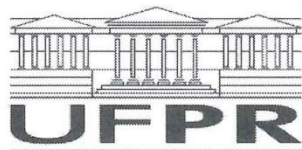
2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

- M236i Malacame, Maicon Felipe
 O indicador de erro de Friberg empregado no método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica de estruturas / Maicon Felipe Malacame – Curitiba, 2018.
 122p. : il. [algumas color.] ; 30 cm.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2018.
 Orientador: Marcos Arndt
 Coorientador: Roberto Dalledone Machado.
 Bibliografia: p. 116-122.
1. Método dos elementos finitos. 2. Friberg (indicador de erro). 3. Mecânica - vibração I. Universidade Federal do Paraná. II. Arndt, Marcos. III. Machado, Roberto Dalledone. IV. Título.

CDD: 531.32

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **MAICON FELIPE MALACARNE** intitulada: **O INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG EMPREGADO NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APPROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 10 de Abril de 2018.

MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

JUCÉLIO TOMAS PEREIRA

Avaliador Externo (UFPR)

HSU YANG SHANG

Avaliador Externo (PUC/PR)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, já que ele possibilitou que este trabalho fosse realizado, especialmente por colocar pessoas especiais ao meu lado, sem as quais certamente não teria conseguido.

Ao meu orientador Marcos Arndt e ao meu coorientador Roberto Dalledone Machado, pela imensa ajuda e pelo encaminhamento necessário para que a pesquisa se tornasse possível. Vocês foram e são referências profissionais e pessoais para o meu crescimento.

A minha mãe, Maria Salete Malacarne e aos meus avós, Leonildo Malacarne e Terezinha Capelletti Malacarne, meu infinito agradecimento, pois eles sempre acreditaram em minha capacidade e nunca desistiram de me auxiliar, até mesmo nos momentos mais difíceis.

Ao meu irmão Willian Rai Malacarne, *in memoriam*, por todos os momentos que contribuíram para a minha formação pessoal.

A minha noiva, Laura Caroline Galvan, que sempre me apoiou em todos os momentos e que me inspira a querer ser uma pessoa melhor.

A meus tios, tias, primos e primas, que me auxiliaram com as caronas desde os tempos de graduação e aos outros que sempre torceram pelo meu bom desempenho. Obrigada pela força!

“Quer vencer os desafios?

Confie em Deus!

Quer ser bom no que faz?

Pratique!

Quer alcançar o objetivo?

Jamais desista!”

Elezer Kosta.

RESUMO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) apresenta excelentes resultados quando aplicado à análise de vibração livre das estruturas, principalmente na obtenção de frequências mais elevadas. No entanto, as abordagens de enriquecimento clássicas da MEFG aplicam o enriquecimento sobre todos os elementos da malha, o que pode gerar instabilidade e mal condicionamento do problema, ou ainda aumentar muito o custo computacional. Este trabalho propõe a utilização do indicador de erro de Friberg em estratégias de enriquecimento adaptativo do MEFG. Esta técnica permite escolher os elementos ou regiões da malha para realizar o enriquecimento, o que pode melhorar o condicionamento do problema e até mesmo a precisão na obtenção de uma frequência específica. Este trabalho apresenta a formulação matemática e as adaptações necessárias para a aplicação do indicador de erro de Friberg no MEFG. São analisados problemas da dinâmica envolvendo a vibração livre de barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli. São apresentadas estratégias para diminuir a dimensão do sistema global e maneiras de se aumentar a acurácia no processo de aproximação com a utilização do indicador de Friberg. Finalmente, os resultados obtidos pelo enriquecimento adaptativo do MEFG são comparados com os obtidos por soluções analíticas e refinamentos clássicos de Método dos Elementos Finitos (MEF) e MEFG.

Palavras-chave: Vibração livre. Análise dinâmica. Indicador de erro de Friberg.

ABSTRACT

The Generalized Finite Element Method (GFEM) presents excellent results when applied to free vibration analysis of structures, mainly in obtaining higher frequencies. However, the classical enrichment approaches of GFEM apply enrichment to all elements of the mesh, that can lead to instability and poor conditioning in the problem or to greatly increase the computational cost. This work proposes the use of the Friberg error indicator in adaptative enrichment strategies of the GFEM. This technique allows to choose the elements or regions of the mesh to perform the enrichment, which can improve the conditioning of the problem and even the accuracy in obtaining a specific frequency. This work presents the mathematical formulation and adaptations necessary for the application of the Friberg error indicator in the GFEM. Dynamic problems of bars, trusses and beams are analyzed. Strategies to reduce the size of the global system and ways to increase accuracy in the approach process are presented. Finally, the results obtained by the adaptive enrichment of GFEM are compared with those obtained by analytical solutions and classical refinements of Finite Element Method (FEM) and GFEM.

Key-words: Free vibration. Dynamic analysis. Friberg error indicator.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO Ω	30
FIGURA 2 – COBERTURA de Ω	36
FIGURA 3 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE TRIGONOMÉTRICAS	37
FIGURA 4 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE TRIGONOMÉTRICAS DEFINIDAS NO DOMÍNIO Ω	38
FIGURA 5 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE LAGRANGEANAS	39
FIGURA 6 – FUNÇÕES PESO DE SHEPARD COM $e = 1$	40
FIGURA 7 – FUNÇÕES PESO DE SHEPARD COM $e = 4$	41
FIGURA 8 – BARRA RETA SUJEITA À DEFORMAÇÃO AXIAL	42
FIGURA 9 – FUNÇÕES DE FORMA LINEARES	45
FIGURA 10 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA	46
FIGURA 11 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA	47
FIGURA 12 – COMPARAÇÃO DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS	49
FIGURA 13 – SISTEMAS DE COORDENADAS LOCAIS DE GLOBAIS PARA UMA BARRA DE TRELIÇA.....	50
FIGURA 14 – VIGA RETA COM DEFORMAÇÃO LATERAL	52
FIGURA 15 – POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE COM $L = 1\text{m}$	55
FIGURA 16 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO TRIGONOMÉTRICAS PARA VIGA.....	56
FIGURA 17 – BARRA FIXA-LIVRE	68
FIGURA 18 – RELAÇÃO DO INDICADOR DE FRIBERG COM O ERRO RELATIVO PARA MALHA NÃO UNIFORME	72
FIGURA 19 – ERRO RELATIVO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME	75
FIGURA 20 – RESULTADO PARA O QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO (COM 9 G. L.) – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME	75
FIGURA 21 – RESULTADO PARA O QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO (COM 25 G. L.) – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME.....	76
FIGURA 22 – RELAÇÃO ENTRE O ERRO RELATIVO E O INDICADOR DE FRIBERG PARA MALHA UNIFORME	80
FIGURA 23 – BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE.....	82

FIGURA 24 – RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE E O ERRO RELATIVO PARA BARRA LIVRE-LIVRE	84
FIGURA 25 – BARRA FIXA-LIVRE BIMATERIAL	85
FIGURA 26 – TRELIÇA PLANA COMPOSTA POR SETE BARRAS.....	87
FIGURA 27 – DECAIMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	90
FIGURA 28 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO ENCONTRADO COM O MEF (6 G.L.) E COM O MEFG (26 G.L.).	91
FIGURA 29 – DECAIMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	93
FIGURA 30 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO ENCONTRADO COM O MEF (6 G.L.) E COM O MEFG (34 G.L.)	94
FIGURA 31 – DECAIMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	96
FIGURA 32 – DECAIMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	98
FIGURA 33 – DECAIMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	100
FIGURA 34 – DECAIMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE	103
FIGURA 35 – VIGA UNIFORME BI-ROTULADA	104
FIGURA 36 – COMPORTAMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE - VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA	108
FIGURA 37 – COMPORTAMENTO DO INDICADOR COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE PARA ω_1 - VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA	108
FIGURA 38 – COMPORTAMENTO DE COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE - VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA	110
FIGURA 39 – COMPORTAMENTO DO INDICADOR COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE PARA ω_2 - VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA	110
FIGURA 40 – VIGA UNIFORME ENGASTADA LIVRE	112

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E ANALÍTICO PARA MALHA NÃO UNIFORME	69
QUADRO 2 – RESULTADOS DO MEFG PARA MALHA NÃO UNIFORME	70
QUADRO 3 – INDICADOR DE FRIBERG COM MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ AMPLIFICADAS - PARA MALHA NÃO UNIFORME	71
QUADRO 4 – COMPARAÇÃO ENTRE MEF E MEFG PARA BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME	72
QUADRO 5 – ERRO RELATIVO PERCENTUAL COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE NO MEFG – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME	74
QUADRO 6 – COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DO INDICADOR DE FRIBERG PARA O ENRIQUECIMENTO DE DOIS ELEMENTOS DA MALHA NÃO UNIFORME	77
QUADRO 7 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E ANALÍTICO PARA MALHA UNIFORME	78
QUADRO 8 – RESULTADOS DO MEFG PARA MALHA UNIFORME.....	79
QUADRO 9 – RESULTADOS DO MEFG PARA A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO PARA MALHA UNIFORME	81
QUADRO 10 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E ANALÍTICO PARA BARRA LIVRE-LIVRE	82
QUADRO 11 – RESULTADO PARA INDICADOR DE FRIBERG MEFG LOCAL PARA BARRA LIVRE-LIVRE	82
QUADRO 12 – ERRO RELATIVO COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE PARA BARRA LIVRE-LIVRE	83
QUADRO 13 – RESULTADOS DO MEF LINEAR PARA BARRA BI-MATERIAL	85
QUADRO 14 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA BARRA BI-MATERIAL....	86
QUADRO 15 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E MEF-P PARA TRELIÇA PLANA	87
QUADRO 16 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA – TRELIÇA PLANA ...	89
QUADRO 17 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA – TRELIÇA PLANA	90
QUADRO 18 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA – TRELIÇA PLANA ...	92

QUADRO 19 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA – TRELIÇA PLANA	93
QUADRO 20 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL E INDICADOR DE FRIBERG PARA – TRELIÇA PLANA	95
QUADRO 21 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA – TRELIÇA PLANA	96
QUADRO 22 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA – TRELIÇA PLANA ...	92
QUADRO 23 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA – TRELIÇA PLANA	98
QUADRO 24 – RESULTADOS MEFG LOCAL PARA – TRELIÇA PLANA.....	99
QUADRO 25 – RESULTADOS DO MEFG PARA – TRELIÇA PLANA.....	100
QUADRO 26 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA – TRELIÇA PLANA .	101
QUADRO 27 – RESULTADOS DO MEFG PARA – TRELIÇA PLANA.....	102
QUADRO 28 – RESULTADOS DO MEF PARA VIGA DE EULER-BERNOULLI BI- ROTULADA.....	105
QUADRO 29 – RESULTADOS DO MEFG PARA VIGA DE EULER-BERNOULLI BI- ROTULADA.....	106
QUADRO 30 – RESULTADOS DO INDICADOR PARA – VIGA DE EULER- BERNOULLI BI-ROTULADA.....	107
QUADRO 31 – RESULTADOS DO INDICADOR PARA – VIGA DE EULER- BERNOULLI BI-ROTULADA.....	109
QUADRO 32 – RESULTADOS DO MEF PARA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA-LIRE	112
QUADRO 33 – RESULTADOS DO MEFG E INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG PARA VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA-LIVRE	113

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EHT	- Elemento Híbrido de Trinca
EPMEFG	- Erro <i>a Posteriori</i> para o Método dos Elementos Finitos Generalizados
GL	- Graus de Liberdade
MC	- Método Composto
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MEFE	- Método dos Elementos Finitos Estendido
MEFEsp	- Método dos Elementos Finitos Espectrais
MEFG	- Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFGE	- Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado
MEFGGL	- Método dos Elementos Finitos Generalizados Global Local
MEFH	- Método dos Elementos Finitos Hierárquico
MEF-p	- Método dos Elementos Finitos p
MEFPU	- Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade
MNS	- Média Nodal Simples
MREE	- Método de Resíduo do Elemento Equilibrado
MRS	- Método de Resíduo de Subdomínio
MSM	- Métodos Sem Malha
PU	- Partição da Unidade
PVC	- Problemas de Valor de Contorno
REP	- <i>Recovery by Equilibration of Patches</i>
SPRE	- <i>Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium</i>
ZZ	- ZienKiewicz e Zhu

LISTA DE SÍMBOLOS

- Variáveis nodais
- Graus de liberdade de campo para barras
- Graus de liberdade de campo
- Graus de liberdade de campo para viga
- \bar{u} - Solução Aproximada
- Solução aproximada de viga
- Aceleração
- Número pertencente aos naturais
- Número pertencente aos naturais
- Número de níveis de enriquecimento
- t) - Força
- Tempo
- Solução espacial do problema
- Solução temporal do problema
- x) - Função de ponderação
- Deslocamento
- Área
- Forma Bilinear
- Constante positiva e independente
- Módulo de elasticidade
- Momento de inércia
- Rigidez
- Comprimento
- Massa
- Bloco da matriz de rigidez do MEFG
- Bloco inferior da matriz de rigidez pertencente ao MEFG
- Bloco superior da matriz de rigidez pertencente ao MEFG
- Bloco da matriz de rigidez pertencente ao MEF
- Bloco da matriz de massa do MEFG
- Bloco inferior da matriz de massa pertencente ao MEFG

- Bloco superior da matriz de massa pertencente ao MEFG
- Bloco da matriz de massa pertencente ao MEF
- Erros de Aproximação
 - Erros de Aritmética Finita e Quadratura
- Erros de Discretização
 - Erros de Aproximação de Domínio
- Erros de Iteração
 - Erros de Propagação
- Erros de Truncamento
- Erros de Arredondamento
 - Espaço de Hilbert de ordem s
- Matriz de rigidez
- Comprimento do elemento
 - Matriz de massa
- Conjunto de funções de forma
- Funções de enriquecimento
 - Espaço vetorial de n dimensões
 - Funções de enriquecimento partição da unidade
- Variação relativa
 - Matriz de rigidez elementar
 - Matriz de massa elementar
- Matriz de rotação
 - Matriz transposta
- Parâmetro de enriquecimento
- Cobertura do domínio
- Funções enriquecedoras para vigas
 - i -ésimo autovetor
 - m -ésimo modo de vibração do MEFG
 - n -ésimo modo de vibração do MEF
- Indicador de Erro de Friberg
 - Graus de liberdade gerados pela aplicação do MEFG
- Parâmetro para o cálculo das r frequências naturais de vigas

- i -ésimo autovalor
- Subespaço
- Funções de forma
 - Norma no espaço H
- Variação
- Operador gradiente
- Domínio
- Rotação do elemento
- Autovalor
- Coordenadas elementares
- Densidade do material
- Número da onda de barra
- Espaço de Hilbert
- Frequência natural de vibração

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	20
1.1.1	Objetivo Geral	20
1.1.2	Objetivos Específicos	20
1.2	Estrutura do Trabalho	20
2	REVISÃO DA LITERATURA	21
2.1	Método dos Elementos Finitos Generalizados	21
2.2	Erros nos Métodos Aproximados	28
3	ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS PELO MEFG	35
3.1	Forma Geral do Problema de Vibração Livre	35
3.2	Método da Partição da Unidade	36
3.3	Enriquecimento no MEFG	41
3.4	Barra com Deformação Axial	42
3.4.1	Treliça Plana com Elementos de Barra	49
3.5	Viga de Euler-Bernoulli com Vibração Transversal	51
4	INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG	58
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	68
5.1	Barra Fixa-Livre	68
5.1.1	Barra Fixa-Livre com Malha não Uniforme	69
5.1.2	Barra Fixa-Livre com Malha Uniforme	77
5.2	Barra Livre-Livre com Malha Uniforme	81
5.3	Barra Bi-Material com Malha Uniforme	84
5.4	Treliça Plana	86
5.4.1	Frequência Alvo	88
5.4.2	Frequência Alvo	92
5.4.3	Frequência Alvo	94
5.4.4	Frequência Alvo	97
5.4.5	Frequência Alvo	99
5.4.6	Frequência Alvo	101
5.4.7	Considerações Sobre Treliça Plana	103

5.5	Viga de Euler-Bernoulli Bi-Rotulada	104
5.6	Viga de Euler-Bernoulli Engastada livre	111
6	CONCLUSÕES	114
	REFERÊNCIAS	116

1 INTRODUÇÃO

Os métodos computacionais são muito importantes para a resolução de vários problemas de engenharia, pois permitem obter soluções aproximadas para a análise de problemas práticos, que antes não eram possíveis de serem resolvidos devido ao alto grau de complexidade que possuem. A busca por métodos confiáveis para a resolução de problemas de valor de contorno é um tema recorrente na literatura, pois com o desenvolvimento de métodos mais aprimorados e juntamente com os avanços computacionais, houve uma melhora significativa em termos de precisão e convergência (TORII, 2012).

O problema da determinação das frequências naturais de vibração de uma estrutura é de grande importância na análise dinâmica de estruturas. Ao determinar as frequências e os modos naturais de vibração através análise modal, torna-se possível identificar características dinâmicas da estrutura. Este procedimento auxilia na confiabilidade estrutural e pode ser adotado antes da estrutura ser construída, durante o processo de construção ou em estruturas prontas. Se algum fator externo como ventos, terremotos e outros, acaba excitando algum dos modos naturais de vibração, por um período de tempo relativamente significativo, pode ocorrer o comprometimento ou até mesmo o rompimento da estrutura (SANTOS, 2009).

A determinação das frequências naturais de uma estrutura pode envolver um custo computacional muito elevado, mesmo usando métodos já consolidados, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que partem do problema de valor de contorno que descreve o fenômeno físico, até chegar ao problema de autovalores e autovetores generalizado, cuja dimensão depende da discretização do domínio do problema. Frequentemente, em problemas práticos, as matrizes envolvidas possuem grandes dimensões, devido ao elevado número de graus de liberdade, tornando essa análise complexa (PETROLI *et al.*, 2016).

Para aumentar a acurácia da aproximação, existem três principais tipos de refinamento, o refinamento h que corresponde ao aumento do número de elementos implicando na diminuição do tamanho de cada elemento, o refinamento p que mantém o tamanho dos elementos fixos e aumenta a ordem da aproximação dentro do elemento e o refinamento hp que consiste na combinação do refinamento h e

refinamento p (TORII, 2012). Outra forma de melhorar a solução aproximada é através do enriquecimento das funções de forma, este procedimento é constantemente utilizado no MEFG.

O MEFG é um método que apresenta bons resultados na análise de barras, vigas, treliças, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões, especialmente na obtenção de frequências mais elevadas. De acordo com Melenk (1995), o MEFG permite incluir características que geralmente a solução analítica do problema apresenta, gerando um ganho considerável em termos de precisão numérica e convergência, permitindo também a construção de espaços de aproximação mais suaves do que no MEF convencional.

O indicador de erro proposto por Friberg (1986) apresenta a propriedade de fazer uma projeção adimensional de quanto irá variar um determinado autovalor pré-selecionado, depois que o Método dos Elementos Finitos p -hierárquico (MEF- p) é aplicado no problema, sendo necessário que haja uma aproximação inicial obtida via MEF. A principal vantagem é que o novo sistema de equações não precisa ser resolvido. Deste modo, se o refinamento p for aplicado em apenas um dos elementos da malha, o indicador medirá a variação na frequência escolhida, provocada pelo acréscimo de novas funções naquele elemento. Segundo Duarte (2003), é possível identificar qual dos elementos influencia de maneira mais significativa na obtenção da solução aproximada, pois quanto maior é o valor para o indicador de erro de Friberg, maior é sua contribuição.

Visto que o MEFG é um método que permite boas aproximações para diversos problemas da análise dinâmica, o presente trabalho baseia-se principalmente no trabalho sobre o MEFG de Arndt (2009), combinado com a utilização do indicador de erro proposto por Friberg (1986) e discutido por Friberg et. al (1987). O indicador de erro de Friberg utilizado neste trabalho é uma extensão do indicador original e foi proposto por Duarte (2003) para o MEF p e é, aqui, adaptado para o MEFG.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Aplicar o indicador de erro de Friberg ao Método dos Elementos Finitos Generalizados no contexto da análise dinâmica de estruturas.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral pretende-se:

- Realizar um levantamento sobre os estimadores de erro aplicados ao MEF e MEFG.
- Aplicar o indicador de erro de Friberg em problemas de vibração livre envolvendo vibração de barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli.
- Propor diferentes abordagens ao realizar o enriquecimento do MEFG, como variar as funções de enriquecimento e o modo com que é realizado.
- Discutir os resultados obtidos quanto à convergência, acurácia e dimensão dos sistemas globais.

1.2 Estrutura do Trabalho

O capítulo 2 aborda uma revisão da literatura sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e, também, apresenta os subsídios teóricos sobre o erro cometido nos métodos aproximados. O capítulo 3 expõe a fundamentação matemática das formulações do MEFG e do MEF para problemas envolvendo vibração livre de barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli. O capítulo 4 apresenta e estende a formulação matemática do indicador de Friberg possibilitando sua aplicação no MEFG. O capítulo 5 contém os resultados obtidos nas simulações numéricas e discussões sobre a aplicabilidade do indicador de erro. Por fim, no capítulo 6 estão as considerações finais e as conclusões do trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A revisão da literatura busca retratar a evolução do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), com maior ênfase nos trabalhos com aplicações na análise dinâmica. Também apresenta uma revisão sobre os tipos de erros numéricos e os principais estimadores de erro aplicáveis ao MEFG.

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O Método dos Elementos finitos Generalizados é baseado no Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade (MEFPU), proposto por Melenk e Babuska (1996), e no Método das Nuvens *hp*, proposto por Duarte e Oden (1996). A ideia principal é construir espaços aproximadores, multiplicando funções pré-selecionadas, que não precisam ser necessariamente polinomiais e representem alguma característica conhecida do problema, por funções que respeitem o critério da partição da unidade. O espaço obtido com a MEFPU herda propriedades de conformidade e regularidade do espaço original (MELENK, BABUSKA, 1996).

O Método das Nuvens *hp* utiliza de funções não polinomiais e não necessita de uma malha de elementos finitos, sendo possível acrescentar funções no espaço aproximador, que contenham características de interesse. Em Duarte e Oden (1996) são encontrados ótimos resultados da aplicação deste método para problemas de placa, embora o problema de integração numérica seja apontado como uma das principais dificuldades encontradas.

O MEFG foi introduzido por Strouboulis, Babuska e Copps (1998) em problemas 2D, como uma combinação entre o MEF e o Método da Partição da Unidade (PU). Diferentes abordagens sobre a partição da unidade são discutidas em Strouboulis, Babuska e Copps (1999), Strouboulis, Babuska e Copps (2001) e Schweitzer (2013).

O trabalho de Belytschko e Black (1999) propõe a aplicação de um método equivalente ao MEFG, denominado Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE), no qual a descontinuidade nos elementos da malha por onde a trinca passa é contornada adicionando funções descontínuas de enriquecimento. Este procedimento apresentou bons resultados na aplicação em propagação de trincas,

onde o enriquecimento é colocado ao longo do caminho da trinca sem a necessidade de reconstrução da malha.

O MEFE também é empregado em problemas de crescimento de trincas que incluem ramificações (BELYTSCHKO et al., 2003). Outra aplicação deste método é descrita por Belytschko, Gracie e Ventura (2007), em que se modela o deslocamento em sistemas com interfaces de materiais arbitrários. Em Belytschko, Gracie e Ventura (2009), conclui-se que o MEFE é equivalente ao MEFG, embora tenham sido desenvolvidos de maneira independente.

De acordo com Góis e Proença (2008), o MEFG se caracteriza como uma extensão não convencional do Método dos Elementos Finitos (MEF), pois o MEFG incorpora características e técnicas dos Métodos Sem Malha (MSM), como o enriquecimento nodal. Este método é utilizado na resolução de problemas de valor de contorno (PVC), que consistem na equação diferencial que governa um determinado problema, juntamente com as condições de contorno, que podem ser de Neumann ou de Dirichlet.

Conforme Weinhardt (2016), a construção de espaços de aproximação não polinomiais não é uma exclusividade do MEFG, pois desde a década de 70 já se utilizavam funções de forma trigonométricas aplicadas ao MEF, porém a abordagem apresentou dificuldades na construção das matrizes de massa e rigidez.

Segundo Torii (2012), o MEFG permite a inclusão de funções não polinomiais à aproximação, de maneira que devido ao fenômeno estudado geralmente possuir características conhecidas, antes mesmo da aplicação do método, é possível selecionar funções que representem melhor o comportamento já conhecido do fenômeno.

Outra característica importante do MEFG, que traz vantagens também para a análise dinâmica de estruturas, é o fato de que este atende aos critérios da partição da unidade, onde o embasamento matemático foi detalhado por Melenk (1995) utilizando alguns conceitos apresentados por Zienkiewicz e Taylor (1977).

A determinação das frequências mais elevadas via MEF não produz boas aproximações para a maioria dos problemas. É neste contexto que o MEFG ganha notoriedade, pois a utilização de partições da unidade construídas a partir de funções racionais permite a obtenção de matrizes de massa e rigidez simétricas e positivo definidas, com isso são excluídos os modos de comportamentos de corpo

rígido, que implicam na melhora da aproximação (GARCIA, ROSSI e LINZMAIER, 2010).

A utilização do MEFG na análise dinâmica de estruturas apresentou bons resultados nos trabalhos de Arndt (2009), Torii (2012), Weinhardt (2016) e Petroli (2016), especialmente em problemas envolvendo a análise dinâmica de barras, vigas, treliças, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões.

Conforme apresentado por Weinhardt (2016) na análise dinâmica de estruturas, as aproximações obtidas com o uso do MEF apresentam dificuldades e limitações na obtenção de frequências mais elevadas e a utilização do MEFG se torna atrativa nestes casos. Este procedimento se mostra eficiente para diversos problemas, porém à medida que novos níveis de enriquecimento são acrescentados, o problema tende a se tornar mal condicionado e, assim, aumenta sua sensibilidade (PETROLI, 2016).

O MEFG também pode ser combinado com outros métodos aproximados, é o que propõem Xiao e Karihaloo (2007), no qual o Elemento Híbrido de Trinca (EHT) é combinado com o MEFG na análise de propagação de trincas em problemas de placa com trinca inclinada sob tensão uniaxial. O EHT é usado na região da ponta da trinca enquanto que o MEFG é utilizado no restante da malha. Este acoplamento dos dois métodos produz bons resultados, sugerindo inclusive para a implementação em pacotes comerciais.

Outra aplicação do MEFG é apresentada em Gracie, Ventura e Belytschko (2007), em que é realizada a modelagem de propagações bidimensionais de trincas em placas com descontinuidade. O enriquecimento é realizado próximo aos pontos de maior tensão para que a descontinuidade seja regularizada. Embora esse procedimento produza bons resultados para deslocamentos, a regularização da descontinuidade converge para uma descontinuidade gradual e um aumento das tensões de cisalhamento perto dos pontos críticos.

Em Fries e Belytschko (2010) é enfatizada a importância do MEFG para a análise numérica de problemas com aplicações práticas, são apresentadas questões metodológicas dessas aplicações, priorizando problemas com singularidade, grandes deformações na malha, trincas, faixas de cisalhamento, solidificações e problemas de campos múltiplos. Também é discutido o problema de integração numérica da forma fraca, uma vez que, sendo o enriquecimento realizado com funções especiais que não são polinomiais, a integração destas funções é realizada

de forma aproximada e pode conter um alto erro e vir a tornar o problema inconsistente e instável.

A construção das funções de enriquecimento é detalha por Duarte e Kim (2008), onde é abordado o Método dos Elementos Finitos Generalizados Global-Local (MEFGGL) que compartilha de características dos Métodos Sem Malha (MSM), como o Método das Nuvens *hp*. Ao utilizar o MEFG pode-se inicialmente discretizar certo problema com uma malha grosseira e em seguida apenas inserir mais níveis de enriquecimento até que se alcance a convergência.

Uma abordagem adaptativa para o MEFG aplicada à análise dinâmica de estruturas foi proposta por Arndt (2009). Trata-se de processo iterativo, em que as funções de enriquecimento são dependentes da geometria e das propriedades do elemento e este procedimento faz a aproximação convergir mais rápido e permite aproximar frequências relacionadas a qualquer modo de vibração. O Método dos Elementos Finitos Generalizados Adaptativo também é comparado com o Método dos Elementos Finitos com refinamento h e com o Método Composto (MC) de Zeng (1998-a) e Zeng (1998-b) para problemas de barras e vigas respectivamente. Os resultados mostram que o MEFG Adaptativo é mais preciso com um número menor de graus de liberdade (ARNDT, 2009).

Excelentes resultados são encontrados na análise dinâmica de barras e treliças via MEFG Adaptativo em Arndt, Machado e Scremin (2010). No problema de barra, a validação do processo pode ser efetuada na comparação da solução aproximada com a solução analítica. Porém, como solução analítica para o problema de treliça raramente é encontrada na literatura, pode se realizar a comparação entre a solução aproximada do MEFG e o resultado encontrado pelo MEF com um elevado número de graus de liberdade.

A modelagem dinâmica de fratura de uma estrutura de paredes finas em forma de casca é descrita por Larsson, Mediavilla e Fagerstrom (2011), onde é realizada a simulação de uma grande deformação na malha em uma estrutura sólida em forma de barril. Devido as grandes deformações na malha e ao problema apresentar descontinuidades, o MEF apresenta dificuldades na simulação deste fenômeno físico. Então, o MEFG é aplicado e a solução aproximada é comparada com o resultado experimental. O modelo experimental e o modelo numérico apresentaram comportamentos similares, pois as características da fratura foram

bem descritas pela formulação do modelo dinâmico de fratura de casca com o MEFG.

Em Liu, Menouillard e Belyschko (2011) é desenvolvido um Método dos Elementos Finitos Generalizados de alta ordem baseado no Método dos Elementos Finitos Espectrais (MEFEsp) e aplicado à análise dinâmica de fratura. A descontinuidade dos deslocamentos é contornada pela partição da unidade empregando um elemento espectral de alta ordem. Os resultados das simulações numéricas mostram que esta metodologia apresenta vantagens em relação ao refinamento h do MEF, especialmente na representação das tensões na ponta da trinca.

Em Torii (2012) são apresentadas formulações do MEFG para a análise dinâmica de barras, treliças, vigas, equação da onda e estado plano de tensão, onde o método enriquecido foi baseado principalmente no trabalho de Arndt (2009). O MEFG foi comparado com o MEF p adaptativo convencional e com o Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH), onde se observou que o MEFG foi capaz de aproximar melhor as frequências mais elevadas, mas o MEFH aproximou com maior precisão as menores frequências.

Ao se aplicar o MEFH, quando novas funções de forma são inseridas, as matrizes de massa e rigidez são reaproveitadas, como submatrizes das novas matrizes de massa e rigidez (SZABÓ e BABUSKA, 1991). O MEFG também pode ser aplicado de forma hierárquica, reaproveitando as matrizes sempre que uma nova função é acrescentada no processo de aproximação.

Aplicações do MEFG na equação da onda bidimensional são propostas por Torii, Machado e Arndt (2015), onde o espaço de aproximação é enriquecido com funções trigonométricas, já que regularmente funções do tipo seno e cosseno aparecem na solução analítica do problema. Este processo incorpora características de interesse ao espaço aproximador. São obtidos resultados mais precisos do que o MEF p , especialmente na obtenção dos modos de vibração mais elevados, que são excitados em problemas oscilatórios de alta frequência.

A instabilidade numérica gerada pelo enriquecimento é um problema que pode implicar em uma severa perda de precisão, pois em alguns casos a matriz de rigidez e a matriz de massa se tornam mal condicionadas, ou seja, apresentam um número de condição muito elevado. Uma forma mais estável do MEFG foi proposta por Babuska e Banerjee (2012), chamado de Método dos Elementos Finitos

Generalizados Estabilizado (MEFGE), onde é proposta uma modificação do enriquecimento para funções próximas a ortogonalidade. De acordo com Duarte (2012) o MEFGE produz uma ótima convergência se comparado ao MEF e ao MEFG tradicional, possibilitando uma grande contribuição na estabilidade do método em problemas de multiescala.

O MEFGE é aplicado em problemas da fratura bidimensionais por Gupta et al. (2013), no qual é realizada uma seleção nos nós da malha que irão receber as funções de enriquecimento. Como o MEFG leva a excelentes taxas de convergência, mas implica no aumento do número de condição das matrizes envolvidas, uma solução para este problema é o MEFGE, pois ele mantém o número de condição estável e o número de graus de liberdade próximo ao MEFG tradicional.

Uma abordagem orientada a objeto como ambiente de programação é proposta para o MEFG por Alves, Barros e Pitangueira (2013), de forma que a generalização do modelo torna possível combinar qualquer tipo de partição da unidade, ou seja, permite que o enriquecimento seja incorporado de forma automática. Esta técnica permite ao usuário que novos tipos de enriquecimentos possam ser implementados em menos tempo, podendo ser estendida para problemas tridimensionais mais complexos e também problemas da mecânica da fratura.

Um estudo da estabilidade do MEFH e do MEFG em relação à técnica de integração no tempo na análise elastodinâmica em meios sólidos, é realizado por Shang (2014). Este trabalho compara diferentes estratégias de incremento temporal como Método Hilbert – Hughes – Taylor (HHT), Método de Newmark e Método alfa generalizado. Também é estudada a relação entre as funções de enriquecimento e a quantidade de pontos de integração que são necessários para conseguir boas aproximações.

Em alguns casos onde o MEFGE é aplicado na análise dinâmica de problemas envolvendo trincas em três dimensões, os resultados apresentam uma severa perda de precisão. Então, Gupta et al. (2015) expõem uma extensão do MEFGE aplicado a problemas tridimensionais da mecânica da fratura, onde é proposto um esquema de enriquecimento baseado em polinômios lineares para recuperar a convergência da aproximação e preservar a estabilidade do método.

A sensibilidade gerada pelo enriquecimento na utilização do MEFG é objeto de estudo de Petroli et al. (2015-a), Petroli et al. (2015-b), onde é analisada a

construção numérica das matrizes de massa e rigidez, em simulações envolvendo barras e vigas de Euler-Bernoulli. Descobriu-se que a matriz de massa é a principal responsável pelo condicionamento do problema de autovalores e autovetores generalizado, dado que se essa matriz for positivo definida esta pode ser decomposta como o produto de matrizes não singulares, que por sua vez é um problema bem condicionado.

Ao resolver o problema de autovalores e autovetores generalizado, pode-se encontrar autovalores negativos, porém estes não possuem significado físico na análise estrutural e são chamados de modos espúrios. Como o mal condicionamento do problema pode provocar modos espúrios, Petroli (2016) observa que existe uma forte correlação entre o número de dígitos utilizados na construção da matriz de massa e o seu número de condição, isso implica que para se obter um sistema bem condicionado deve-se redobrar a atenção na construção da matriz de massa.

A estabilidade do MEFG também é discutida nos trabalhos de Weinhardt, Arndt e Machado (2015), Weinhardt (2016) e Weinhardt, Arndt e Machado (2016), onde são apresentadas simulações de problemas de barras e membranas bidimensionais na análise modal e transiente. São apresentadas duas propostas para a estabilização do método, uma baseada no MEFGE e outra na variação dos parâmetros das funções de enriquecimento propostas por Arndt (2009). A segunda estratégia se mostrou mais eficiente do que a primeira, embora o ganho em estabilidade implique em uma pequena perda de precisão para as frequências mais baixas, mas no geral o espectro de frequências é melhor do que no MEFG convencional.

A construção de funções de enriquecimento para problemas multiescala é apresentada por Malekan et al. (2016), onde se propõem a decomposição da solução em duas componentes, uma de escala local e outra global. Diferentes tipos de enriquecimentos são combinados, para que as características dos fenômenos locais sejam incorporadas na aproximação global. Quando há um fenômeno que atinge apenas uma região do domínio, esta região é discretizada por uma malha refinada e a solução é incorporada no domínio global, que pode ser discretizado por uma malha grosseira.

A solução para problemas da dinâmica linear e não-linear com a utilização do MEFG é apresentada por Piedade Neto e Proença (2016), em que são utilizadas funções de enriquecimento polinomiais combinadas com uma técnica de integração

implícita para resolver o problema de integração no tempo. Ao utilizar polinômios para realizar o enriquecimento, a integração é mais simples do que a integração de funções trigonométricas, porém os enriquecimentos polinomiais podem produzir dependência linear entre as funções de forma, o que prejudica a precisão do método.

Um novo elemento C^0 quadrilateral enriquecido aplicado em problemas de estado plano de tensão é proposto por Shang et al (2017), onde o enriquecimento do MEFG é realizado com funções trigonométricas e exponenciais. Os resultados desta proposta foram satisfatórios para o caso de vibração livre com malhas uniformes e não uniformes.

A aplicação do MEFG Adaptativo exposta por Debella, Arndt e Machado (2017) aponta que existem modos de vibração que influenciam mais na análise dinâmica transiente do que outros. Neste trabalho é apresentada uma proposta de aplicação do Método da Superposição Modal, não utilizando todos os modos de vibração, que são encontrados na matriz modal. As respostas utilizando uma quantidade reduzida de modos de vibrar, aqueles que são prioritários, apresentam a mesma precisão do que com a utilização de todos os modos, porém o custo computacional é reduzido.

Outros trabalhos recentes sobre o MEFG demonstram a importância deste método para a análise de estruturas, alguns desses trabalhos são: Custódio e Arndt (2017) na aplicação do MEFG na análise dinâmica do estado plano de tensões, Santos, Barros e Pitangueira (2017) na aplicação do MEFG em problemas da fratura em três dimensões, Freisleben *et al.* (2017) na análise dinâmica de vigas de Timoshenko, Weinhardt et al. (2017) no uso do MEFG com estabilização heurística na análise dinâmica de barras com seção não uniforme, Oliveira et al. (2017) realizando a análise de problemas bidimensionais da mecânica da fratura com aplicação do MEFGE.

2.2 Erros nos Métodos Aproximados

Ao se obter uma solução aproximada para certo problema, é de suma importância conhecer o quão distante a aproximação se encontra da solução exata. Comumente em problemas envolvendo a engenharia, não é possível obter a solução analítica, assim os métodos aproximados são a única saída (PETROLI, 2016).

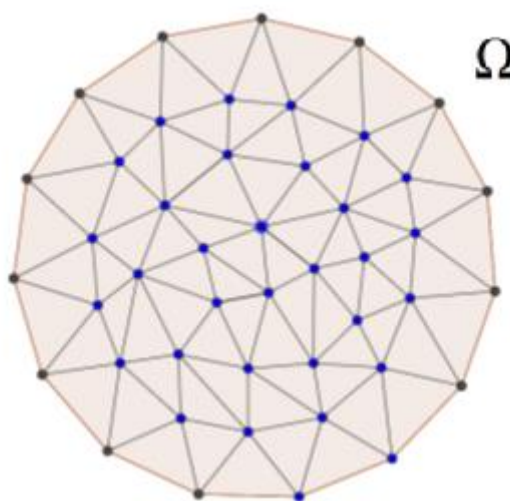
Estudos sobre o erro cometido em uma aproximação são recorrentes na literatura, alguns deles são apresentados nos próximos parágrafos.

De acordo com Martins (2013) e Marchi (2001), os erros numéricos podem ser divididos em cinco categorias: Erros de Truncamento (E_T); Erros de Iteração (E_I); Erros de Arredondamento (E_π); Erros de Propagação (E_{Pr}) e Erros de Discretização (E_D). Cada um deles é descrito a seguir:

- Erros de Truncamento: Ao propor que a solução de uma equação diferencial é obtida a partir de um processo infinito de passos e devido à limitação da memória computacional, uma solução aproximada pode ser obtida com um número finito de iterações, o que gera um erro.
- Erros de Iteração: São derivados da utilização de métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações diferenciais resultado do processo de discretização. Ao variar o método utilizado, diferentes aproximações podem ser geradas e a cada uma está associado um erro.
- Erros de Arredondamento: É uma classe de erro inerente ao método ou ao processo utilizado, pois estes são provocados pela representação finita dos números reais que é usada pelos computadores, devido à memória computacional ser limitada. Sendo assim, a precisão utilizada interfere na solução aproximada. Quanto maior a precisão empregada, menor será o erro proveniente do arredondamento.
- Erros de Propagação: Quando um erro ocorre, seja na implementação do modelo numérico ou no fornecimento dos dados de entrada, no decorrer da aplicação do método o erro é propagado até a obtenção da solução aproximada. Esse tipo de erro pode comprometer toda a análise, resultando em uma solução aproximada que esteja relativamente distante da solução exata. Esse problema é agravado quando não existe uma forma de obter a solução analítica, o que é comum nos problemas encontrados na engenharia, devido à complexidade dos problemas reais.
- Erros de discretização: Quando o domínio contínuo do problema é discretizado por uma malha, a solução da equação diferencial que descreve o problema passa a ser produto da resolução de um sistema de equações. Se a discretização do domínio for feita de maneira grosseira, a solução do sistema de equações tende a conter um erro maior do que a solução obtida na resolução de um sistema de equações derivado de uma malha que se aproxima melhor do domínio

contínuo do problema. Um processo de discretização do domínio contínuo (Ω) através de uma malha não uniforme é apresentado na figura 1.

FIGURA 1 – DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO Ω .



Na perspectiva do Método dos Elementos Finitos, de acordo com Silva (2015), os principais tipos de erro encontrados são: Erros de Aproximação de Domínio (E_{DO}); Erros de Aritmética Finita e Quadratura (E_{AQ}); Erros de Aproximação (E_A). Cada um deles é descrito a seguir:

- Erros de Aproximação de Domínio: se houver erro nas especificações do problema, a solução aproximada que é obtida tende a ser contaminada, pois neste caso a equação diferencial não descreve o problema real. Este tipo de erro geralmente é mais comum em problemas bidimensionais e tridimensionais.
- Erros de Aritmética Finita e Quadratura: devido ao computador utilizar uma quantidade finita para representar grandezas contínuas, durante a aplicação do MEF as integrações numéricas apresentam erro. Uma alternativa para contornar este problema é aumentar o número de pontos de integração.
- Erros de Aproximação: são os erros derivados da substituição da solução exata pela solução aproximada na equação diferencial que descreve o problema. Estes erros são inerentes a qualquer problema.

Visto que a análise numérica de um determinado fenômeno físico pode conter diversas formas de erro, saber o quão longe a solução aproximada se encontra da solução exata é algo almejado na análise dos problemas descritos pelas equações diferenciais. Nessa perspectiva surgem os estimadores de erro, que

aumentam a credibilidade da solução aproximada, pois alguns deles têm a capacidade de estimar um limite superior para o erro, permitindo estimar o erro cometido na aproximação.

Conforme Szabó e Babuska (1991), os estimadores de erro podem ser divididos em duas categorias, estimadores *a priori* e estimadores *a posteriori*. A primeira categoria contém os estimadores que são aplicados ao problema antes do método numérico ser usado e estimam o erro que vai ser cometido durante a aplicação, podendo ser utilizados para identificar e neutralizar o erro durante as iterações. Já a segunda categoria contém os estimadores que são utilizados depois que uma aproximação inicial foi obtida e aproximam qual é o erro cometido durante o processo. Alguns dos estimadores *a posteriori* empregam a própria solução inicial para obter uma nova aproximação dando mais enfoque onde o erro maior foi cometido. Estes estimadores são chamados de estimadores de erro baseados em recuperação (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987).

A principal ferramenta para abordagens adaptativas é a análise do erro com caráter local *a posteriori*, onde o controle adaptativo é projetado para manter o tamanho da perturbação abaixo de uma determinada tolerância (BABUSKA, RHEINBOLDT, 1978). Estabelecer um limite de tolerância para o erro é interessante no âmbito de que todas as aproximações conterão um erro abaixo do limite superior.

Uma comparação entre estimadores de erro *a posteriori* na análise do Método dos Elementos Finitos é apresentada por Silva (2015), onde são comparados o estimador fundamentado da Média Nodal Simples (MNS), o estimador Zienkiewicz e Zhu (ZZ), o estimador *Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium* (SPRE) e o estimador *Recovery by Equilibration of Patches* (REP). Estes estimadores baseiam-se na recuperação de derivadas de ordem superior e na norma de energia.

Outra classificação entre modelos de estimadores de erro é descrita por Jasinski e Zboinski (2013), onde estes são separados em dois grupos, os que partem de princípios subjacentes e os que diferem pela localidade, sendo:

- Subjacentes: descrevem o erro através de recuperação de padrões, relações constitutivas, extrapolações, resíduos e interpolações baseadas em estimadores de erro *a posteriori*.
- Localidade: descrevem o erro através de medidas globais de tensão e da energia de deformação, onde é definido um funcional para a solução.

Em Lins (2011) é proposto um estimador de erro *a posteriori* para o MEFG, chamado EPMEFG, onde se usa mínimos quadrados em relação aos pontos de superconvergência, com base na recuperação de valores nodais dos gradientes da solução. Silva (2015) realiza a análise dos principais estimadores de erro *a posteriori* aplicados ao MEF usando um tipo de refinamento adaptativo de malha, onde a malha é adaptada ao problema analisado, baseando-se na estimativa do erro cometido no elemento. Posteriormente, Leite (2016) propõe um limite superior do erro de discretização no Método de Elementos Espectrais aplicado na equação da onda com coeficientes variáveis.

Baseado no estimador ZZ, Preange, Loehnert e Wriggers (2012) propõem um estimador de erro para problemas da mecânica da fratura e do dano, na perspectiva do MEFG, onde as tensões são suavizadas e incorporam as descontinuidades e as singularidades provocadas pelas trincas. Ao recuperar as tensões, é possível estabelecer uma estimativa para o erro. Uma abordagem similar é proposta por Lins et al. (2017) na construção de um estimador de erro para o MEFGE e aplicado na análise de trincas, onde as principais características do MEFGE são levadas em consideração para o cálculo do estimador.

Outro estimador de erro *a posteriori* para o MEFG é apresentado em Bordas, Duflot e Le (2008), este utiliza mínimos quadrados combinado com o método da difração em problemas com descontinuidade. Este estimador de erro é calculado usando a norma L_2 de energia, onde o erro global é dado pela soma dos erros de cada elemento da malha. À medida que a malha é refinada, este estimador tende a zero e esse comportamento é descrito também como índice de efetividade do estimador.

Segundo Torii e Machado (2012), os principais erros numéricos no MEFG aplicado à análise dinâmica transiente podem resultar de procedimentos de integração no tempo e da aproximação nos elementos finitos. Para contornar estes problemas pode-se reduzir o intervalo de tempo usado para a integração e aumentar o número de dígitos significativos durante a aproximação.

Um estimador de erro *a posteriori* para o problema de flexão de placas laminadas com a utilização do MEFG foi proposto por Mendonça, Chamoin e Barcellos (2016). O estimador é construído a partir de um limite superior para a norma em energia, e é obtido através das relações constitutivas de Ladeveze. Esse processo é capaz de estimar um limite superior para o erro, mas em alguns casos o

erro é superestimado. Outra aplicação de um estimador de erro baseado na norma em energia é apresentada em Torres, Barcellos e Barros (2016), onde se propõe o uso de resíduos oriundos diretamente da forma forte do problema para a estimativa do erro na norma de energia.

A análise do estimador de erro baseado no método de resíduo do subdomínio (MRS) e do estimador de erro no resíduo do elemento equilibrado (MREE) aplicados ao MEFG na análise não-linear de estruturas de concreto é descrita por Ferreira, Barros e Greco (2016). Estes estimadores foram adaptados para problemas da mecânica do dano e da fratura. Os dois estimadores são comparados e os resultados são bons para as regiões que sofrem menor dano e tendem a piorar a medida que o dano aumenta, sendo que o MRS produz estimativas melhores do que o MREE.

No trabalho de Jin et al. (2017), um estimador de erro fundamentado na recuperação de padrões global estendida, é usado para estimar o erro na aproximação realizada pelas funções de enriquecimento do MEFG em problemas de propagação de trincas tridimensionais, de modo que este estimador permite uma adaptação na malha, para tentar diminuir o erro global.

Baseando-se em um enfoque que parte diretamente do problema de autovalores e autovetores, Friberg (1986) propôs um estimador que utiliza uma aproximação inicial dos autovalores e autovetores para estimar qual será a variação em um autovalor alvo ao acrescentar novas funções de forma em um refinamento p hierárquico. Uma característica interessante é que o novo sistema formado com as matrizes aumentadas não precisa ser resolvido para que o estimador seja calculado. Desta maneira é possível notar que o estimador de Friberg, embora seja um estimador a posteriori, contém semelhanças com um estimador de erro *a priori*.

O indicador de erro de Friberg mede o erro aproximado para uma das frequências devido ao aumento hierárquico ocorrido em um dos elementos (DUARTE, 2003). Logo, o uso desse indicador torna possível investigar a contribuição que cada elemento possui no erro total cometido na obtenção de uma nova aproximação.

Duarte (2003) apresentou algumas considerações necessárias para aplicar o estimador de Friberg no problema de interação fluido-estrutura usando a variável potencial de velocidades para o fluido e deslocamento para o meio sólido. Os resultados por ele apresentados foram satisfatórios, pois o estimador se mostrou

eficaz ao ser utilizado para reduzir a dimensão dos sistemas envolvidos, gerando uma redução do esforço computacional, que é mais significativa na resolução de grandes sistemas de equações.

A aplicação do indicador de Friberg (1986) no Método de Elementos Finitos Generalizados na análise dinâmica de estruturas, envolvendo problemas de barra, vigas de Euler – Bernoulli e treliças planas é fundamentada pelos trabalhos de Malacarne et al (2017-a, 2017-b e 2017-c).

3 ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS PELO MEFG

Neste capítulo é apresentada a forma geral de problemas de vibração livre, bem como é realizada a construção de algumas partições da unidade e a fundamentação matemática das formulações do MEFG e do MEF para problemas envolvendo vibração livre de barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli.

3.1 Forma Geral de Problemas de Vibração Livre

A forma geral dos problemas de vibração livre de estruturas é apresentada em Arndt (2009). Ela pode ser representada por um problema linear de autovalores e autovetores, na forma geral:

$$T(u) = \lambda Qu \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

$$P(u) = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.2)$$

onde T , Q e P são operadores lineares definidos no domínio Ω e no contorno $\partial\Omega$. Para os problemas de vibração livre de barra e vigas de Euler-Bernoulli, o operador T é um operador linear elíptico de ordem $2m$ e P é um operador de contorno de ordem até m . O problema de vibração livre de barras ou vigas uniformes, tem Q como um operador identidade I , e a equação (3.1) torna-se um problema de autovalor convencional:

$$T(u) - \lambda Iu = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.3)$$

A forma variacional para o problema de autovalores convencional toma a forma: “encontre o par (λ, u) com $u \in H$ satisfazendo as condições essenciais $Pu = 0$ sobre $\partial\Omega$ tal que:

$$B(u, w) = \lambda(u, w) \quad \forall w \in H, \quad (3.4)$$

onde $H \subset H^m(\Omega)$ é a classe de funções admissíveis, (u, w) indica o produto interno em L^2 e $B(u, w)$ é a forma bilinear associada ao operador T .

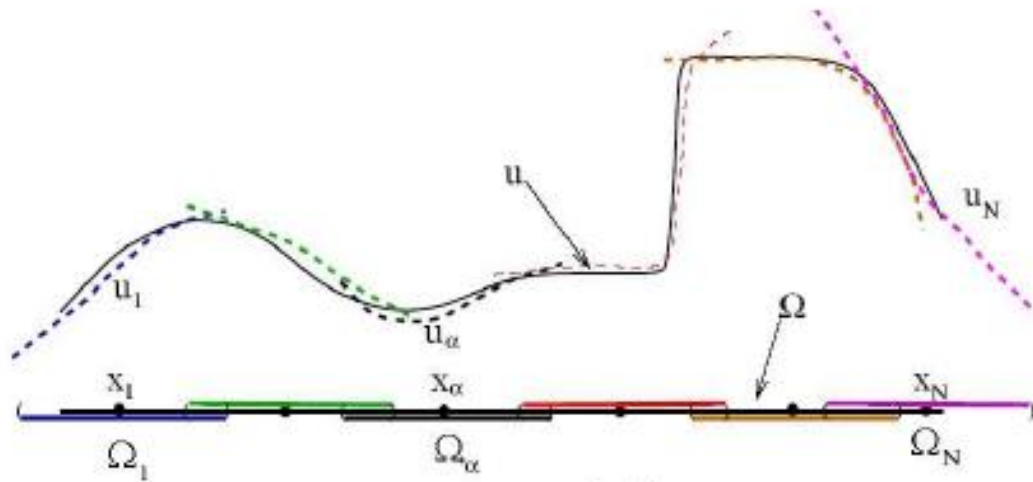
3.2 Método da Partição da Unidade

Seja u , pertencente ao espaço de Hilbert H^1 , a função a ser aproximada e $\Omega \subset R^n$ um conjunto aberto e Ω_i uma cobertura de Ω , ilustrado pela figura 2, onde a condição de sobreposição é satisfeita:

$$\exists M \in N, \text{ tal que } \forall x \in \Omega, \quad \text{card}\{i|x \in \Omega_i\} \leq M \quad (3.5)$$

Assim, M será o número máximo de subcoberturas de Ω_i que se sobrepõem em algum ponto $x \in \Omega$.

FIGURA 2 – COBERTURA Ω_i DE Ω .



Fonte: Duarte, Babuska e Oden (2000)

Seja $\{\phi_i\}$ uma partição da unidade Lipschitziana subordinada a Ω_i , que satisfaz:

$$\text{Suporte } \phi_i \subset \text{fechamento}(\Omega_i) \forall i, \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

$$\sum_i \phi_i \equiv 1 \text{ em } \Omega$$

$$\|\phi_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq C_\infty \quad (3.8)$$

$$\|\nabla \phi_i\|_{L^\infty(R^n)} \leq \frac{C_G}{\text{diam } \Omega_i} \quad (3.9)$$

na qual C_G e C_∞ são constantes e $\{\phi_i\}$ é uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{\Omega_i\}$.

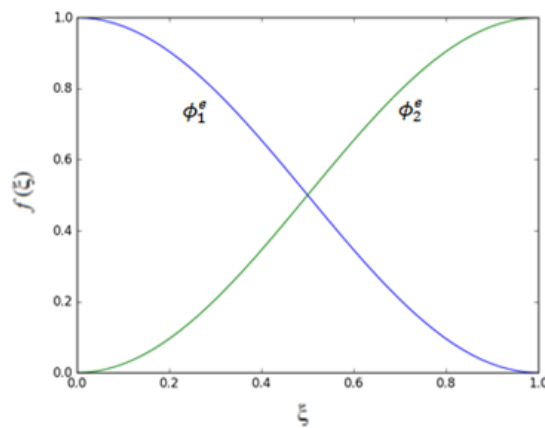
Uma partição da unidade (PU) pode ser construída partindo-se da relação fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para todo x que pertence aos reais. Assim, para um elemento finito de coordenadas locais $\xi = [0,1]$, as seguintes funções podem ser definidas:

$$\phi_1^e = \cos^2 \left(\xi \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.10)$$

$$\phi_2^e = \sin^2 \left(\xi \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.11)$$

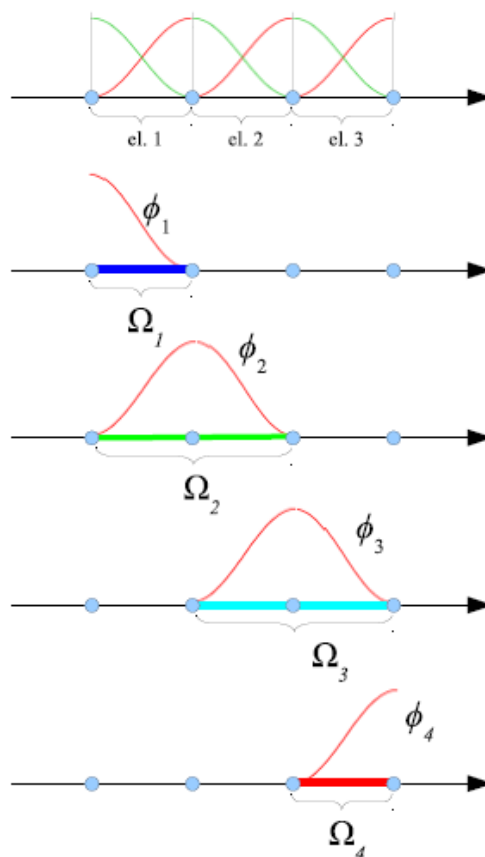
As funções apresentadas pela equação (3.10) e pela equação (3.11), representadas na figura 3, são exemplos de funções que podem ser utilizadas para a PU.

FIGURA 3 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE TRIGONOMÉTRICAS.



Uma distribuição das funções partição da unidade no domínio global é apresentada por Torii (2012) e está apresentada na figura 4.

FIGURA 4 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE TRIGONOMÉTRICAS DEFINIDAS NO DOMÍNIO Ω .



Fonte: Torii (2012)

A figura 4 mostra as funções PU em um domínio que é discretizado por três elementos, el.1, el.2 e el.3, sendo ϕ_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, funções trigonométricas partição da unidade e Ω_i as subcoberturas do domínio Ω .

Outra forma de construir funções que respeitem a PU é apresentada em Weinhardt (2016), através dos polinômios de Lagrange e dos polinômios racionais de Shepard.

Segundo Burden e Faires (2008) dado um número n de pontos, o polinômio de Lagrange $L_i(\xi)$ associado ao ponto i de coordenada ξ_i pode ser escrito por

$$L_i(\xi) = \frac{\prod_{a=1, a \neq i}^n (\xi - \xi_a)}{\prod_{a=1, a \neq i}^n (\xi_i - \xi_a)} \quad (3.12)$$

Logo, os polinômios de Lagrange cúbicos podem ser escritos como

$$L_1(\xi) = \frac{-36\xi^3 + 72\xi^2 - 41\xi + 5}{5} \quad (3.13)$$

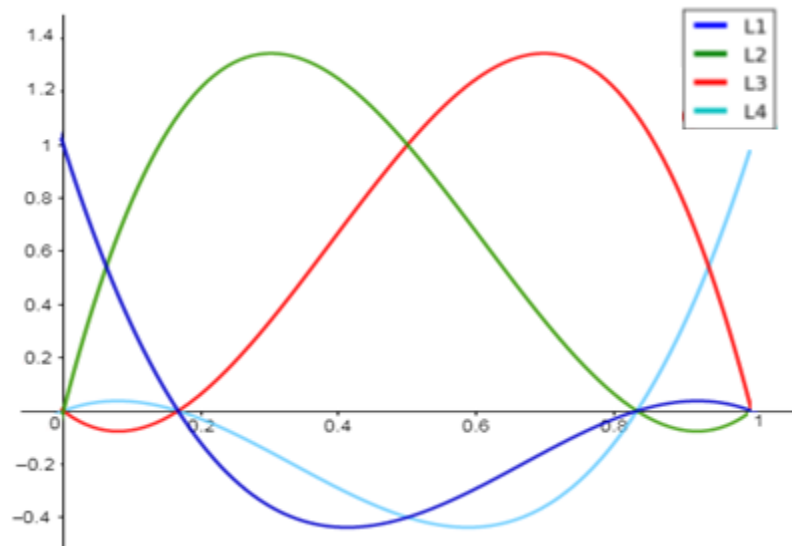
$$L_2(\xi) = \frac{6\xi^3 - 11\xi^2 + 5\xi}{2} \quad (3.14)$$

$$L_3(\xi) = \frac{-6\xi^3 + 7\xi^2 - \xi}{2} \quad (3.15)$$

$$L_4(\xi) = \frac{36\xi^3 - 36\xi^2 + 5\xi}{5} \quad (3.16)$$

e geram uma partição da unidade no intervalo $\xi_i = [0,1]$, como mostrado na figura 5.

FIGURA 5 – FUNÇÕES PARTIÇÃO DA UNIDADE LAGRANGEANAS.



Fonte: Weinhardt (2016)

Os polinômios racionais de Shepard (Figuras 6 e 7), por sua vez, são dados por

$$S_1(\xi) = \frac{W_1(\xi)}{(W_1(\xi) + W_2(\xi))} \quad (3.17)$$

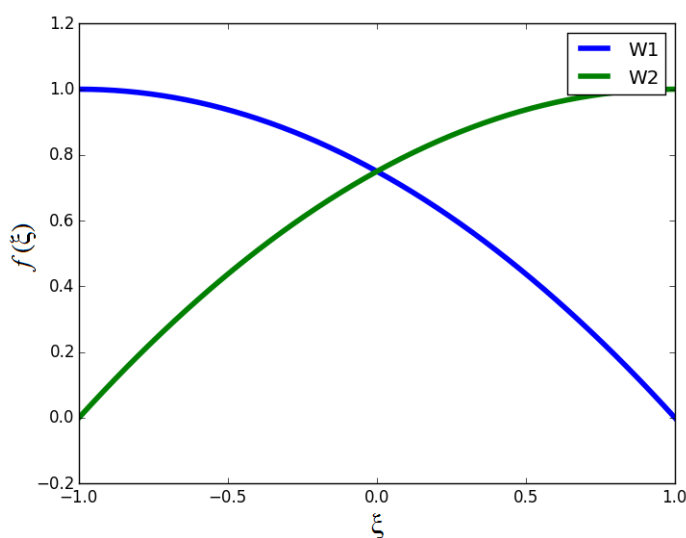
$$S_2(\xi) = \frac{W_2(\xi)}{(W_1(\xi) + W_2(\xi))}, \quad (3.18)$$

onde W_1 e W_2 são funções peso, que podem, por exemplo, ser dadas por

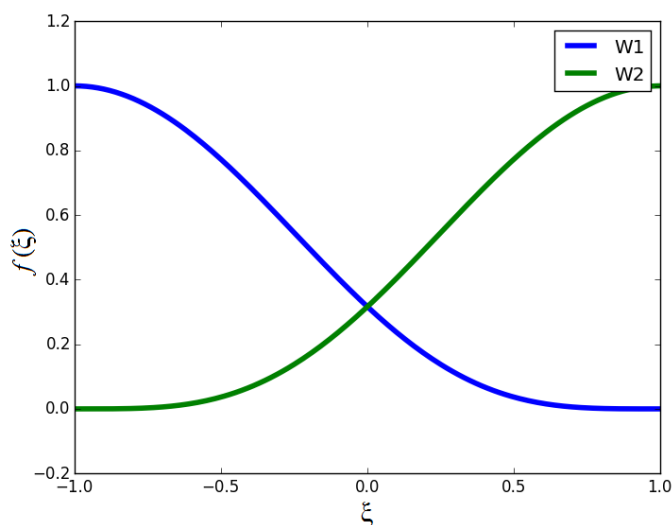
$$W_1(\xi) = \left[1 - \left(\frac{1+\xi}{h_\alpha}\right)^2\right]^n \quad \text{e} \quad W_2(\xi) = \left[1 - \left(\frac{1-\xi}{h_\alpha}\right)^2\right]^n \quad (3.19)$$

em que h_α é o diâmetro da cobertura definida pelas funções de aproximação e com a variação de $n = 1, 2, 3, \dots$ são construídas diferentes funções peso de Shepard.

FIGURA 6 – FUNÇÕES PESO DE SHEPARD COM $h_\alpha = 2$ E $n = 1$.



Fonte: Weinhardt (2016)

FIGURA 7 – FUNÇÕES PESO DE SHEPARD COM $h_\alpha = 2$ E $n = 4$.

Fonte: Weinhardt (2016)

3.3 Enriquecimento no MEFG

O enriquecimento utilizado no MEFG consiste na multiplicação de funções de interesse por funções PU, para que as novas funções construam um espaço de aproximação com a regularidade desejada. As funções de aproximação devem representar uma boa aproximação local e ser densas no conjunto de soluções da equação diferencial que descreve o problema (PETROLI, 2016).

De acordo com Weinhardt (2016), a solução aproximada para determinada equação diferencial pode ser escrita como a soma de duas parcelas: uma oriunda do MEF, baseada nos graus de liberdade nodais e outra do enriquecimento, construída a partir dos graus de liberdade de campo. Assim o campo de deslocamentos é dado por

$$\bar{u} = u_{MEF} + u_{ENRIQUECIMENTO}, \quad (3.20)$$

que pode ser escrito na forma matricial como

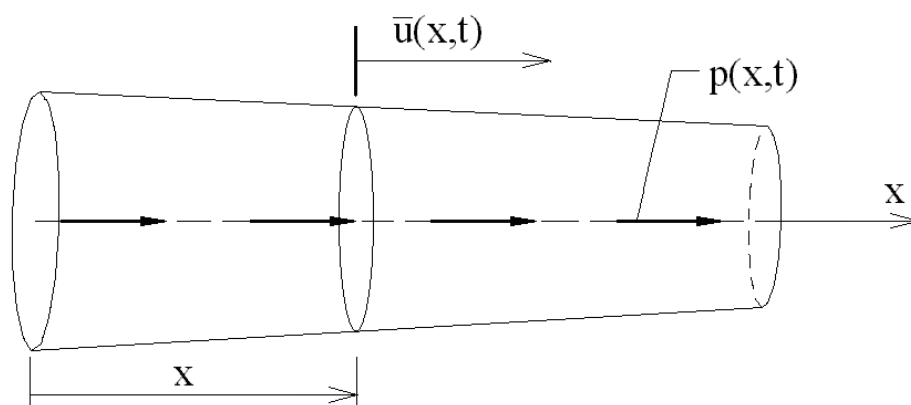
$$\bar{u} = N^T q + \varphi^T c, \quad (3.21)$$

onde q é o vetor de graus de liberdade nodais, N é o vetor com as funções de forma lineares do MEF, φ é o vetor com as funções de enriquecimento e c é o vetor com os graus de liberdade de campo.

3.4 Barra com Deformação Axial

O problema estrutural de uma barra reta de comprimento L , com vibração longitudinal (Figura 8), considera a hipótese que seções transversais planas e normais ao eixo da barra, permanecem planas e normais após a deformação. O material possui comportamento linear, elástico e a barra é homogênea.

FIGURA 8 – BARRA RETA SUJEITA À DEFORMAÇÃO AXIAL.



Fonte: Arndt (2009).

Feitas essas considerações, o problema de barra pode ser modelado pela equação diferencial parcial expressa por

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)A(x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) = p(x,t), \quad (3.22)$$

sujeito às condições de contorno e iniciais, onde $\rho(x)$ é a massa específica, $E(x)$ é o módulo de elasticidade, $A(x)$ é a área da seção transversal, $p(x,t)$ é a força axial aplicada, \bar{u} é o deslocamento e t é o tempo. Este problema se resume a encontrar uma solução $\bar{u}(x,t)$ para que a igualdade da equação (3.22) seja satisfeita. Para $p(x,t) = 0$ tem-se um problema de vibração livre. Assim, admitindo A, E e ρ constantes, a equação de equilíbrio se transforma em:

$$\rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.23)$$

ou ainda,

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0. \quad (3.24)$$

Admita-se que a solução aproximada \bar{u} é dada pelo produto entre duas funções, $u(x)$ dependente apenas de x e outra $T(t)$ dependente apenas de t , ou seja, $\bar{u}(x, t) = u(x)T(t)$. Assim, a equação diferencial parcial dada na equação (3.24) pode ser escrita de forma acoplada por duas equações diferenciais ordinárias, dadas por:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{\alpha E T}{\rho} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha u = 0, \quad (3.26)$$

onde,

$$\alpha = \frac{\frac{d^2 u}{dx^2}}{u} = \frac{\rho}{E} \frac{\frac{d^2 T}{dt^2}}{T} \quad (3.27)$$

Neste caso a solução analítica é conhecida, sendo dada por (Arndt, 2009):

$$u(x) = a \cdot \sin(\sigma x) + b \cdot \cos(\sigma x) \quad (3.28)$$

$$T(t) = c \cdot \sin(\omega t) + d \cdot \cos(\omega t) \quad (3.29)$$

com,

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sigma \quad (3.30)$$

onde a, b, c e d são constantes, ω é a frequência natural de vibração da estrutura e σ é o número de onda da barra.

Uma solução aproximada para o caso de vibração livre pode ser encontrada aplicando o método dos resíduos ponderados na equação (3.23), multiplicando a mesma por uma função peso $w = w(x)$ e integrando no domínio $\Omega = (0, L)$, sendo

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w dx - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) w dx = 0. \quad (3.31)$$

Para reduzir a condição sobre a continuidade da segunda derivada de \bar{u} e transferir a condição para a função de ponderação $w(x)$, é realizada a integração por partes do segundo termo da equação (3.31), tem-se

$$\int_0^L \rho A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} w dx - \left(w EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)_0^L + \int_0^L \left(EA \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0. \quad (3.32)$$

De acordo com Carey e Oden (1984) em problemas de vibração livre admitem-se soluções periódicas do tipo

$$\bar{u}(x, t) = e^{i\omega t} u(x) = (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) u(x) \quad (3.33)$$

onde ω é a frequência natural de vibração. A equação (3.32) pode então ser escrita como um problema de autovalores (λ) e autovetores (u) na forma variacional, com $\lambda \in R$ e $u \in H^1(0, L)$:

$$E \int_0^L A \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx - E \left(w A \frac{du}{dx} \right)_0^L - \lambda \rho \int_0^L A u w dx = 0 \quad (3.34)$$

Aplicando as condições de contorno, a forma variacional do problema pode ser escrita como

$$B(u, w) = \lambda F(u, w) \quad (3.35)$$

onde $B: H^1 \times H^1 \rightarrow R$ e $F: H^1 \times H^1 \rightarrow R$, em que

$$B(u, w) = E \int_0^L A \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (3.36)$$

$$F(u, w) = \rho \int_0^L A u w dx \quad (3.37)$$

A forma matricial do problema pode ser escrita, conforme (Arndt, 2009), com a matriz de massa $[M]$ e a matriz de rigidez $[K]$ do MEF, como:

$$Ku = \lambda Mu \quad (3.38)$$

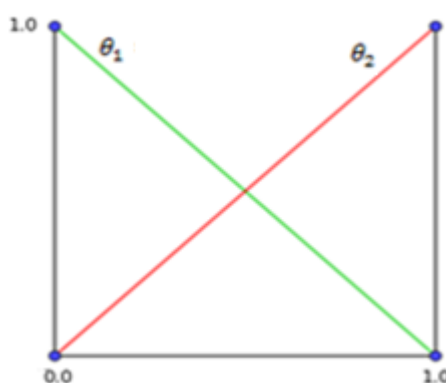
onde,

$$[K] = E \int_0^{L_e} A \frac{d\theta_i}{dx} \frac{d\theta_j}{dx} dx \quad (3.39)$$

$$[M] = \rho \int_0^{L_e} A \theta_i \theta_j dx \quad (3.40)$$

onde $0 \leq x \leq L_e$, θ_i e θ_j são funções de forma, que no MEF são geralmente polinomiais e L_e é o comprimento do elemento. As funções de forma lineares do MEF são ilustradas na figura 9.

FIGURA 9 – FUNÇÕES DE FORMA LINEARES.



Como a solução analítica do problema de barra admite termos trigonométricos, é razoável admitir que as funções aproximadoras também contenham termos trigonométricos, desta forma a solução aproximada tende a se aproximar da solução analítica. Neste contexto, para as simulações realizadas neste

trabalho, adotam-se as funções enriquecedoras apresentadas em Arndt (2009) e escritas nas coordenadas locais $\xi = [0,1]$, que posteriormente são multiplicadas pelas funções partição da unidade $\phi_1 = \xi$ e $\phi_2 = 1 - \xi$, dadas por:

$$\phi_3^j = \sin (\beta_j . L_e . \xi) \quad (3.41)$$

$$\phi_4^j = \cos (\beta_j . L_e . \xi) - 1 \quad (3.42)$$

$$\phi_5^j = \sin (\beta_j . L_e . (\xi - 1)) \quad (3.43)$$

$$\phi_6^j = \cos (\beta_j . L_e . (\xi - 1)) - 1 \quad (3.44)$$

onde L_e é o comprimento do elemento e β_j é um parâmetro tal que $\beta_j = j\pi$, com $j = 1,2,3,\dots,nl$, sendo nl é o número de níveis de enriquecimento. As funções da equação (3.41) a equação (3.44) são apresentadas graficamente na figura 10 e na figura 11.

FIGURA 10 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA $\beta = 1\pi$.

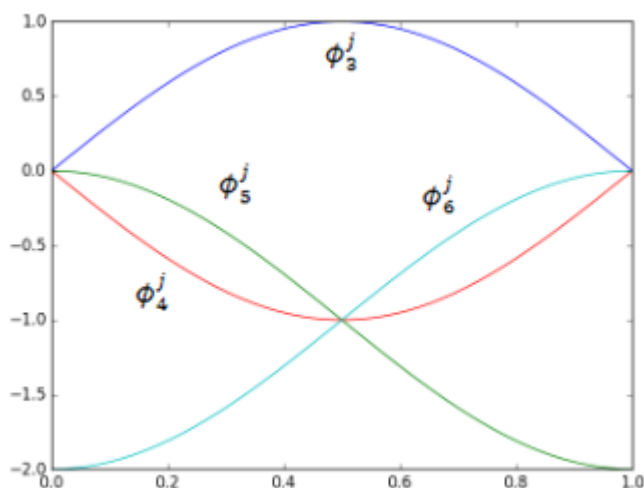
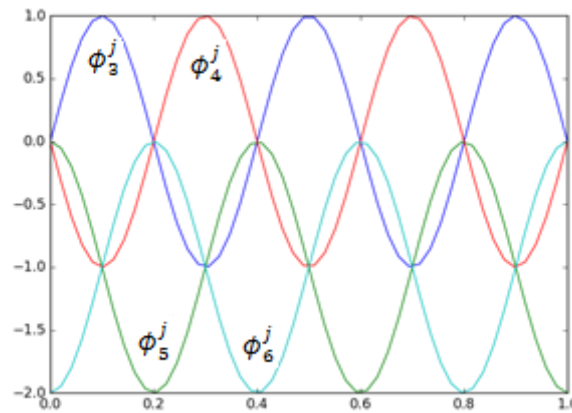


FIGURA 11 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA $\beta = 5\pi$.

Pode-se observar que quando o valor do parâmetro β_j é aumentado de 1π para 5π , o número de ondas por intervalo aumenta significativamente. Porém esse aumento também implica num erro maior no processo de integração numérica, o que acaba prejudicando a aproximação.

A solução aproximada encontrada na equação (3.20) tem suas parcelas escritas como

(3.45)

$$u_{MEF}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi) \cdot u_i$$

e

(3.46)

$$u_{ENRIQUECIMENTO}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(\xi) \cdot \left[\sum_{j=1}^{nl} \phi_{2i+1}^j(\xi) \cdot a_{ij} + \phi_{2i+2}^j(\xi) \cdot b_{ij} \right]$$

onde $\phi_i(\xi)$ são funções partição da unidade, u_i são graus de liberdade nodais, $\phi_{2i+1}^j(\xi)$ e $\phi_{2i+2}^j(\xi)$ as funções de enriquecimento dadas nas equações (3.41 a 3.44), a_{ij} e b_{ij} são graus de liberdade de campo e nl o número de níveis de enriquecimento.

Outra metodologia de enriquecimento é adotada por Weinhardt (2016) para a estabilização do MEFG e consiste numa proposta de variação do parâmetro β_j nas funções trigonométricas, que foram propostas por Torii (2012), e que se diferenciam

das funções propostas por Arndt (2009) pela retirada do parâmetro L_e . As funções são definidas no intervalo $\xi = [-1,1]$, e dadas por (TORII, 2012):

$$\phi_7^j = \sin \left(\beta_j \cdot \frac{(\xi+1)}{2} \right) \quad (3.47)$$

$$\phi_8^j = \sin \left(\beta_j \cdot \frac{(\xi-1)}{2} \right) \quad (3.48)$$

$$\phi_9^j = \cos \left(\beta_j \cdot \frac{(\xi+1)}{2} \right) - 1 \quad (3.49)$$

$$\phi_{10}^j = \cos \left(\beta_j \cdot \frac{(\xi-1)}{2} \right) - 1 \quad (3.50)$$

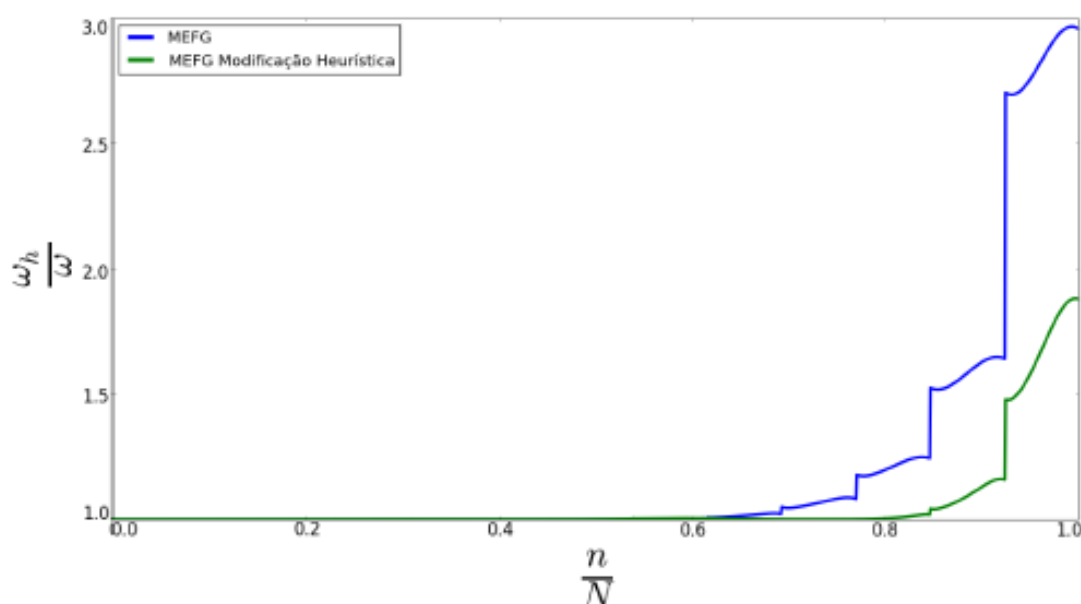
com $\beta_j = j\pi$. Weinhardt (2016), para melhorar a estabilidade numérica do MEFG, propôs uma modificação no parâmetro β_j dada por:

$$\beta_j = \left[2(j-1) + \frac{\beta_1}{\pi} \right] \pi, \quad \text{com } \beta_1 = \pi \text{ e } j \geq 1 \quad (3.51)$$

É importante notar que para o primeiro nível de enriquecimento, tem-se $\beta_j = \beta_1 = 1\pi$, o que implica que para este nível a proposta de Weinhardt (2016) e o enriquecimento proposto por Arndt (2009) e Torii (2012) são equivalentes.

Na figura 12 é apresentada a comparação do espectro de frequências na simulação de um problema de barra, encontrado em Weinhardt (2016), onde é realizada a comparação entre o MEFG convencional e o MEFG estabilizado (Modificação Heurística) quando são colocados três níveis de enriquecimento.

FIGURA 12 – COMPARAÇÃO DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS



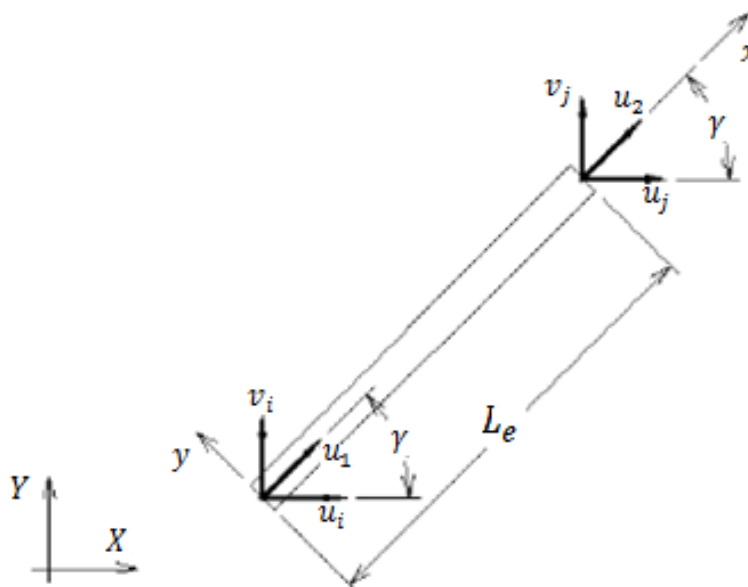
Fonte: Weinhardt (2016).

Na figura 12, $\frac{\omega_h}{\omega}$ é uma proposta para normalização das soluções aproximadas ω_h , ao dividi-las pelas soluções analíticas ω , e analogamente os n -ésimos graus de liberdade (n) podem ser normalizados em função do número total de graus de liberdade N , ou seja, $\frac{n}{N}$.

3.4.1 Treliça Plana com Elementos de Barra

A análise de treliças planas é baseada em um sistema formado pela união de barras retas, que são modeladas pela equação diferencial parcial na equação (3.23), admitindo somente deformações axiais. Segundo Arndt (2009), a solução analítica para o problema de vibração livre envolvendo treliças planas raramente é encontrada na literatura. Devido às treliças planas possuírem eixos longitudinais geralmente não colineares entre si, são utilizados dois sistemas de coordenadas, um local e outro global, como ilustrado na figura 13.

FIGURA 13 – SISTEMAS DE COORDENADAS LOCAIS PARA GLOBAIS DE UMA BARRA DE TRELIÇA.



Fonte: Arndt (2009)

Um elemento com dois graus de liberdade no sistema de coordenadas locais torna-se um elemento de quatro graus de liberdade no sistema de coordenadas globais. De acordo com Arndt (2009), o elemento no sistema local pode ser relacionado ao sistema global pela matriz de rotação $[T]$, onde

$$T = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

sendo γ o ângulo de rotação do elemento em relação à horizontal.

A rotação é aplicada nas matrizes que compõem o problema de autovalores e autovetores generalizado, de modo que a matriz de rigidez elementar é escrita como $[K^e] = [T]^T [K] [T]$ e a matriz de massa elementar é escrita como $[M^e] = [T]^T [M] [T]$, apresentadas genericamente por

$$[K^e] = \frac{A \cdot E}{L_e} \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\sin^2 \gamma \\ -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ -\cos \gamma \cdot \sin \gamma & -\sin^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$[M^e] = \frac{\rho \cdot A \cdot L_e}{3} \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \frac{1}{2} \cos^2 \gamma & \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma & \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \frac{1}{2} \sin^2 \gamma \\ \frac{1}{2} \cos^2 \gamma & \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \cos^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma \\ \frac{1}{2} \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \frac{1}{2} \sin^2 \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Quando as funções de enriquecimento do MEFG são usadas, novos graus de liberdade são criados. Estes novos graus de liberdade de campo não são afetados pela mudança de sistema de coordenadas. Assim, a transformação de coordenadas do vetor de deslocamento local no vetor global é escrita por

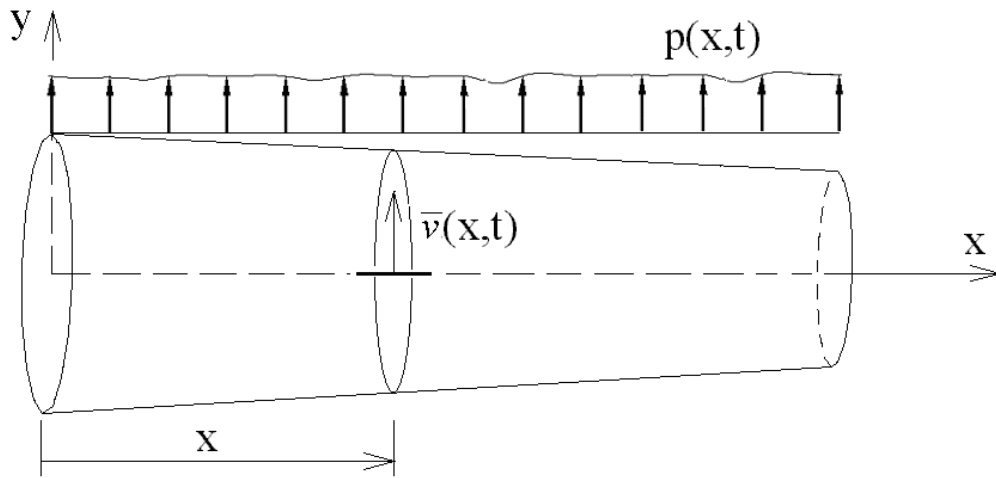
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

onde u_1 e u_2 são os deslocamentos locais antes da rotação, c_1, c_2, \dots, c_n são os n graus de liberdade de campo referentes ao MEFG e u_i, v_i, u_j, v_j são os graus de liberdade nas duas direções globais X e Y .

3.5 Viga de Euler-Bernoulli com Vibração Transversal

O problema de viga de Euler-Bernoulli admite deformação lateral, sendo que existe uma linha neutra que não está sujeita a tração e nem a compressão. O material possui comportamento linear, elástico e a viga é homogênea. As deformações transversais por cisalhamento são desconsideradas. As tensões normais nas direções transversais (nas direções Y e Z), são pequenas se comparadas com a tensão axial (na direção X). A inércia rotacional é desconsiderada. A viga de Euler-Bernoulli está ilustrada na figura 14.

FIGURA 14 – VIGA RETA COM DEFORMAÇÃO LATERAL.



Fonte: Arndt (2009).

A equação diferencial parcial, sujeita às condições de contorno e iniciais, que rege este fenômeno pode ser encontrada em Torii (2012), onde é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 \bar{v}(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \left(\frac{\partial^2 \bar{v}(x,t)}{\partial t^2} \right) = p(x,t). \quad (3.56)$$

Esta equação é chamada de forma forte do problema, onde $p(x,t)$ é a força aplicada que varia em função do comprimento x e do tempo t , $\bar{v}(x,t)$ é o deslocamento transversal, $A(x)$ é a área da seção transversal, $I(x)$ é o momento de inércia, $E(x)$ é o módulo de elasticidade, ρ é a densidade. A solução analítica da equação (3.56) é escrita como duas equações ordinárias acopladas por separação de variáveis é dada por

$$\bar{v}(x,t) = v(x) \cdot T(t) \quad (3.57)$$

$$v(x) = b_1 \cdot \sin(kx) + b_2 \cdot \cos(kx) + b_3 \cdot \sinh(kx) + b_4 \cdot \cosh(kx) \quad (3.58)$$

$$T(t) = a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) \quad (3.59)$$

$$k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2, \quad (3.60)$$

onde b_1, b_2, b_3, b_4, a_1 e a_2 são constantes, ω é a frequência natural de vibração da viga e k é o número de onda de flexão.

Para encontrar uma solução aproximada $\bar{v} = \bar{v}(x, t)$ para o deslocamento transversal aplica-se o método dos resíduos ponderados, multiplicando a equação (3.56) por uma função peso $w = w(x)$ e integrando no domínio $\Omega = (0, L)$:

$$\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) w dx + \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \right) w dx = \int_0^L p(x, t) w dx. \quad (3.61)$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação (3.61), tem-se

(3.62)

$$w \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \right) w dx = \int_0^L p(x, t) w dx$$

Integrando por partes o segundo termo da equação (3.62), tem-se

(3.63)

$$w \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial w}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L + \int_0^L \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \right) w dx = \int_0^L p(x, t) w dx.$$

A equação (3.63) é chamada de forma fraca do problema. Particularizando o problema para o caso de vibração livre, ou seja, $p(x, t) = 0$ e E, I, A e ρ constantes,, tem-se:

(3.64)

$$wEI \left(\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial x^3} \right) \Big|_0^L - \frac{\partial w}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \Big|_0^L + EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \rho A \int_0^L \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} \right) w dx = 0$$

A equação (3.64) admite soluções periódicas do tipo:

$$\bar{v}(x, t) = e^{i\omega t} v(x) = (\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)) v(x) \quad (3.65)$$

onde ω é a frequência natural de vibração e $v(x)$ os deslocamentos. A equação (3.64) pode ser escrita como um problema de autovalores (λ) e autovetores (v), com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in H^2(0, L)$, dado por:

$$wEI \left(\frac{d^3 v}{dx^3} \right)_0^L - EI \frac{dw}{dx} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_0^L + EI \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \lambda \rho A \int_0^L v w dx = 0 \quad (3.66)$$

Aplicando as condições de contorno de vibração livre, tem-se

$$B(v, w) = \lambda F(v, w) \quad (3.67)$$

onde $B: H^2 \times H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $F: H^2 \times H^2 \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$B(v, w) = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (3.68)$$

$$F(v, w) = \rho A \int_0^L v w dx \quad (3.69)$$

Para a aplicação do MEFG na análise da vibração de viga de Euler-Bernoulli, na equação (3.20) a parcela u_{MEF} é construída utilizando polinômios de Hermite do MEF e a parcela $u_{ENRIQUECIMENTO}$ é construída por funções partição da unidade lineares e funções de enriquecimento baseadas no Método dos Modos Admissíveis (MMA) (CRAIG, 1981).

Os polinômios cúbicos de Hermite (figura 15), definidos no intervalo $\xi = [0, 1]$, são dados por Augarde (1998) como

$$H_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (3.70)$$

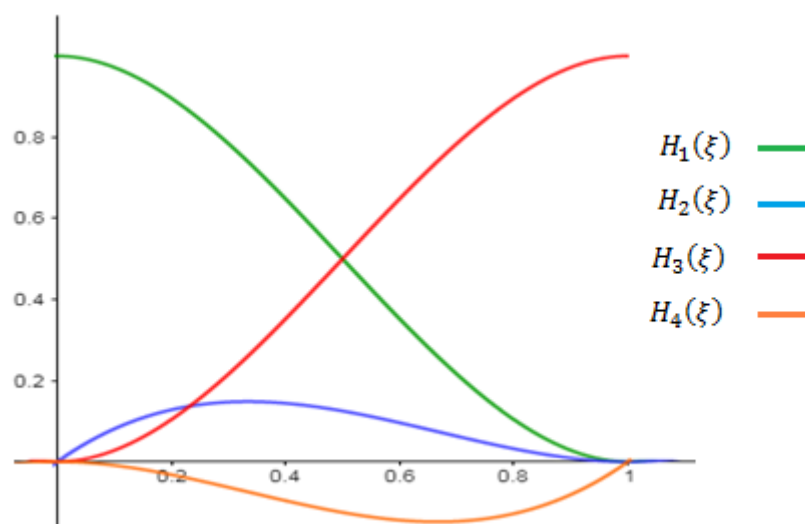
$$H_2(\xi) = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (3.71)$$

$$H_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (3.72)$$

$$H_4(\xi) = L(-\xi^2 + \xi^3) \quad (3.73)$$

onde L é o comprimento da viga.

FIGURA 15 – POLINÔMIOS CÚBICOS DE HERMITE COM $L = 1m$.



As funções partição da unidade lineares são dadas por:

$$L_1(\xi) = 1 - \xi \quad (3.74)$$

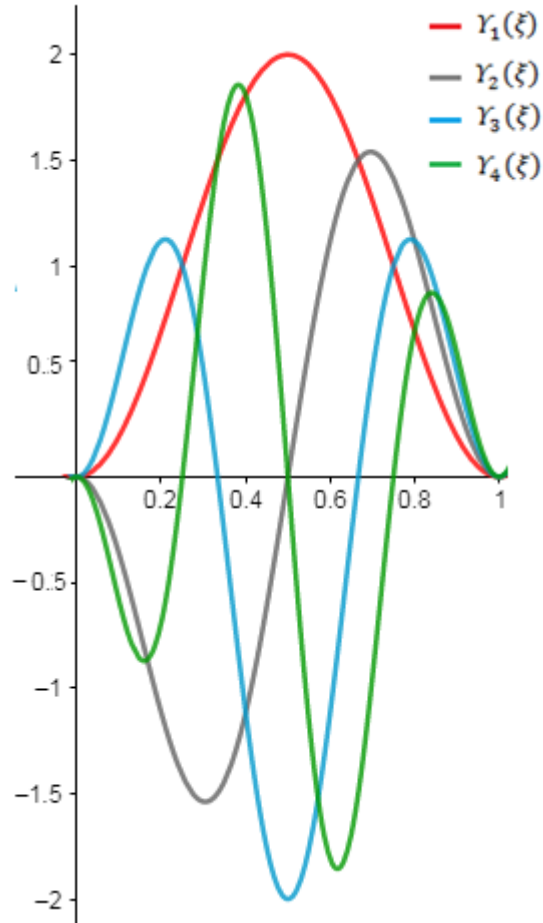
$$L_2(\xi) = \xi \quad (3.75)$$

As funções de enriquecimento trigonométricas (figura 16), definidas no intervalo $\xi = [0,1]$, são escritas na forma:

$$Y_i(\xi) = \cos[(i-1)\pi(\xi+1)] - \cos[(i+1)\pi(\xi+1)] \quad , i = 1, 2, 3 \dots nl \quad (3.76)$$

onde nl é o número de níveis de enriquecimento.

FIGURA 16 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO TRIGONOMÉTRICAS PARA VIGA $nl = 4$.



A solução aproximada para este problema dada na equação (3.20) tem suas parcelas escritas como

(3.77)

$$u_{MEF}^e(\xi) = H_1 v_1 + H_2 \theta_1 + H_3 v_2 + H_4 \theta_2$$

e

(3.78)

$$u_{ENRIQUECIMENTO}^e(\xi) = \sum_{i=1}^2 L_i(\xi) \cdot \left[\sum_{j=1}^{nl} Y_j(\xi) c_{ij} \right]$$

onde $L_i(\xi)$ são as funções partição da unidade dadas nas equações (3.74) e (3.75), v_i são os deslocamentos nodais, θ_i são as rotações nodais, $H_i(\xi)$ com $i = 1,2,3,4$ são os polinômios cúbicos de Hermite encontrados nas equações (3.70) a (3.73), $\gamma_j(\xi)$ são as funções de enriquecimento dadas na equação (3.76) e c_{ij} são os graus de liberdade de campo.

4 INDICADOR DE ERRO FRIBERG

Para problemas de vibração livre sem amortecimento, o sistema de equações diferenciais que descreve o problema pode ser encontrado em Soriano (2014) e é dado por

$$M.\ddot{u} + K.u = 0, \quad (4.1)$$

onde M é a matriz de massa, \ddot{u} é o vetor aceleração, K é a matriz de rigidez e u é o vetor dos deslocamentos. O sistema de equações (4.1) admite a seguinte solução (CHOPRA, 2012):

$$u(t) = q_n(t) \cdot \Phi_n \quad (4.2)$$

em que uma das parcelas $q_n(t)$ é dependente do tempo e a outra Φ_n , denominada modo de vibração é dependente dos deslocamentos, onde n é o total de graus de liberdade. A variação temporal dos deslocamentos é escrita como uma função harmônica simples, dada por:

$$q_n(t) = c_1 \text{sen}(\omega t) + c_2 \text{cos}(\omega t), \quad (4.3)$$

onde c_1 e c_2 são constantes e ω é uma frequência de vibração. Substituindo a equação (4.3) na equação (4.2), tem-se:

$$u(t) = (c_1 \text{sen}(\omega t) + c_2 \text{cos}(\omega t)) \cdot \Phi_n. \quad (4.4)$$

Derivando duas vezes a equação (4.4), tem-se:

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 (c_1 \text{sen}(\omega t) + c_2 \text{cos}(\omega t)) \cdot \Phi_n. \quad (4.5)$$

Substituindo a equação (4.4) e a equação (4.5) na equação (4.1):

$$M.(-\omega^2 (c_1 \text{sen}(\omega t) + c_2 \text{cos}(\omega t)) \Phi_n) + K.(c_1 \text{sen}(\omega t) + c_2 \text{cos}(\omega t) \cdot \Phi_n) = 0 \quad (4.6)$$

ou ainda,

$$(K \cdot \Phi_n - \omega^2 M \cdot \Phi_n) \cdot q_n(t) = 0. \quad (4.7)$$

Na equação (4.7), se a parcela que depende do tempo não for igual a zero, $q_n(t) \neq 0$, tem-se que:

$$(K - \omega^2 \cdot M) \cdot \Phi_n = 0 \quad (4.8)$$

ou seja,

$$(K - \lambda_i \cdot M) \cdot \Phi_n = 0 \quad (4.9)$$

onde $i = n$ e o sistema de equações (4.9) é conhecido como problema de autovalores e autovetores generalizado, onde Φ_n é o autovetor associado ao i -ésimo autovalor λ_i . Na análise dinâmica de estruturas os autovetores são os modos de vibração que a estrutura pode apresentar e a i -ésima frequência ω_i associada a cada modo pode ser encontrada pela raiz quadrada do i -ésimo autovalor $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

A solução trivial $\Phi_n = 0$ para (4.9) não é interessante, pois implica na não existência de movimento, então o sistema de equações (4.9) apresenta solução não trivial quando $\det(K - \lambda_i M) = 0$, de onde é possível se obter um polinômio característico de ordem n , com raízes todas positivas, pois de acordo com Chopra (2012) as matrizes K e M são definidas positivas para que seja evitado o movimento de corpo rígido.

Outra aproximação para a solução da equação (4.1) utilizando o Método dos Elementos Finitos é escrita por:

$$(4.10)$$

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i$$

onde N_i são as funções de forma usualmente polinomiais e a_i são as variáveis nodais.

Como o MEFG tem a importante propriedade de inserir características da solução de interesse no conjunto das funções de aproximação e aumentar a convergência do processo, são inseridas novas funções de enriquecimento

R_j utilizando a partição da unidade e b_j são os graus de liberdade de campo. Assim, a solução da equação (4.1) também pode ser expressa por

(4.11)

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i + \sum_{j=1}^m R_j \cdot b_j$$

Supondo que o sistema de equações do MEF tenha dimensão n , então o sistema de equações do MEFG tem dimensão $n + m$. Desse modo, as matrizes de rigidez e massa podem ser escritas em bloco como:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{n \times n} & [K]_{n \times m} \\ [K]_{m \times n} & [K]_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{n \times n} & [M]_{n \times m} \\ [M]_{m \times n} & [M]_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Logo o sistema de equações (4.9) é escrito na forma matricial como:

$$\left(\begin{bmatrix} [K]_{n \times n} & [K]_{n \times m} \\ [K]_{m \times n} & [K]_{m \times m} \end{bmatrix} - \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} [M]_{n \times n} & [M]_{n \times m} \\ [M]_{m \times n} & [M]_{m \times m} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_n \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

Para o sistema $(n \times n)$ o autovalor λ_i^n pode ser escrito empregando o Quociente de Rayleigh (CHOPRA, 2012):

$$\lambda_i^n = \frac{K_i}{M_i} = \frac{(\Phi_i^T \cdot K_{n \times n} \cdot \Phi_i)}{\Phi_i^T \cdot M_{n \times n} \cdot \Phi_i}, \quad (4.15)$$

onde K_i é a matriz de rigidez, M_i é a matriz de massa e adotando Φ_i como vetor com os graus de liberdade nodais.

Para o sistema aumentado com o enriquecimento vindo do MEFG, o autovalor λ_i^{n+m} para o sistema $(n + m \times n + m)$ é

$$\lambda_i^{n+m} = \frac{K_i}{M_i} = \frac{(\theta_i^T \cdot K_{n+m \times n+m} \cdot \theta_i)}{\theta_i^T \cdot M_{n+m \times n+m} \cdot \theta_i}, \quad (4.16)$$

onde θ_i é o vetor formado pelos graus liberdade nodais e os graus de liberdade de campo.

A variação do i -ésimo autovalor, ligado ao enriquecimento usando o MEFG somente no j -ésimo elemento, pode ser aproximado por:

$$\text{Variação Relativa} = V_{i,j} \approx \frac{\lambda_i^{(n)} - \lambda_i^{(n+m)}}{\lambda_i^n} \quad (4.17)$$

Esta estimativa pode ser aplicada a todos os autovalores resultantes do MEF, depois de se ter realizado o enriquecimento com o MEFG.

Supondo que λ_i seja uma função de duas variáveis independentes, ou seja, dependendo apenas da rigidez K_i e da massa M_i , então é possível expandir a função $\lambda_i(K_i, M_i)$ em uma série de Taylor, quando acontece uma variação na rigidez ΔK_i e uma variação na massa ΔM_i , logo tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda_i(K_i + \Delta K_i, M_i + \Delta M_i) &\approx \lambda_i(K_i, M_i) + \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} \cdot \Delta K_i + \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} \cdot \Delta M_i + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i^2} \cdot \Delta K_i^2 + \frac{\partial^2 \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i \partial M_i} \cdot \Delta K_i \cdot \Delta M_i + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i^2} \cdot \Delta M_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

Se a série for truncada nos três primeiros termos, tem-se

$$\lambda_i(K_i + \Delta K_i, M_i + \Delta M_i) - \lambda_i(K_i, M_i) \approx \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} \cdot \Delta K_i + \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} \cdot \Delta M_i. \quad (4.19)$$

ou seja,

$$\Delta \lambda_i \approx \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} \cdot \Delta K_i + \frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} \cdot \Delta M_i. \quad (4.20)$$

Mas, $\lambda_i(K_i, M_i)$ pode ser definida como

$$\lambda_i(K_i, M_i) = \frac{K_i}{M_i} \quad (4.21)$$

Como as derivadas parciais da equação (4.21) são:

$$\frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial K_i} = \frac{1}{M_i} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \lambda_i(K_i, M_i)}{\partial M_i} = -\frac{K_i}{M_i^2} \quad (4.23)$$

Substituindo as equações (4.22) e (4.23) na equação (4.20) obtém-se:

$$\Delta \lambda_i \approx \frac{1}{M_i} \cdot \Delta K_i - \frac{K_i}{M_i^2} \cdot \Delta M_i \quad (4.24)$$

Dividindo a equação (4.24) por λ_i , tem-se

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{1}{M_i} \cdot \Delta K_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} - \frac{K_i}{M_i^2} \cdot \Delta M_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \quad (4.25)$$

E, novamente como $\lambda_i = \frac{K_i}{M_i}$, então:

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{1}{M_i} \cdot \Delta K_i \cdot \frac{1}{\frac{K_i}{M_i}} - \frac{K_i}{M_i^2} \cdot \Delta M_i \cdot \frac{1}{\frac{K_i}{M_i}} \quad (4.26)$$

Simplificando

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{\Delta K_i}{K_i} - \frac{\Delta M_i}{M_i} \quad (4.27)$$

Também pode se escrever $M_i = \frac{K_i}{\lambda_i}$, então substituindo em (4.27) obtém-se:

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{\Delta K_i}{K_i} - \lambda_i \cdot \frac{\Delta M_i}{K_i} \quad (4.28)$$

Tomando (4.15) e (4.16), pode-se escrever ΔK_i e ΔM_i como:

$$\Delta K_i = (\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^T\}_{n+m} \cdot [K_{n+m \times n+m}] \cdot \{\theta_i\}_{n+m}) \quad (4.29)$$

$$\Delta M_i = (\{\Phi_i^T\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^T\}_{n+m} \cdot [M_{n+m \times n+m}] \cdot \{\theta_i\}_{n+m}) \quad (4.30)$$

onde $\{\Phi_i\}$ são os autovetores do sistema $(n \times n)$ e $\{\theta_i\}$ os autovetores do sistema $(n + m \times n + m)$.

Como o segundo termo das equações (4.29) e (4.30) pode ser escrito em bloco, como na equação (4.14), então:

$$(4.31)$$

$$\begin{aligned} \Delta K_i = & (\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \{\theta_i^T\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \\ & (\{\theta_i^T\}_n \cdot [K_{n \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m)^T + \{\theta_i^T\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_i = & (\{\Phi_i^T\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^T\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \{\theta_i^T\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \\ & (\{\theta_i^T\}_n \cdot [M_{n \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m)^T + \{\theta_i^T\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m) \end{aligned}$$

Sabendo ainda que as matrizes de rigidez e massa são simétricas, então $[K]_{m \times n} = [K]_{n \times m}^T$, $[M]_{m \times n} = [M]_{n \times m}^T$, também tem-se:

$$(\{\theta_i^T\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n) = (\{\theta_i^T\}_n \cdot [K_{n \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m)^T \quad (4.33)$$

$$(\{\theta_i^T\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n) = (\{\theta_i^T\}_n \cdot [M_{n \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m)^T \quad (4.34)$$

Substituindo as equações (4.33) e (4.34) nas equações (4.31) e (4.32), respectivamente, tem-se:

(4.35)

$$\Delta K_i = (\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + 2 \cdot \{\theta_i^T\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \{\theta_i^T\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m) \quad (4.36)$$

$$\Delta M_i = (\{\Phi_i^T\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n) - (\{\theta_i^T\}_n \cdot [M_{n \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + 2 \cdot \{\theta_i^T\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\theta_i\}_n + \{\theta_i^T\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\theta_i\}_m).$$

Quando o autovetor se encontra próximo da convergência, as variações são mínimas então é factível considerar $\{\Phi_i\} \approx \{\theta_i\}$, logo:

$$\Delta K_i = -2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n - \{\Phi_i^T\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m \quad (4.37)$$

$$\Delta M_i = -2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n - \{\Phi_i^T\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m. \quad (4.38)$$

Em seguida, substitui-se as equações (4.37) e (4.38) em (4.28):

(4.39)

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot [K_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n - \{\Phi_i^T\}_m \cdot [K_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m}{K_i} + \lambda_i \cdot \left(\frac{2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot [M_{m \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n + \{\Phi_i^T\}_m \cdot [M_{m \times m}] \cdot \{\Phi_i\}_m}{K_i} \right)$$

ou ainda

(4.40)

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K_{m \times n}] - \lambda_i \cdot [M_{m \times n}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} + \left(\frac{\{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K_{m \times m}] - \lambda_i \cdot [M_{m \times m}]) \cdot \{\Phi_i\}_m}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} \right).$$

Ao resolver o problema de autovalores e autovetores de dimensão $(n \times n)$ aplicando o MEF, pode se obter a aproximação do erro para o autovalor λ_i ao se aplicar um refinamento utilizando a expressão (4.40), faltando ainda determinar $\{\Phi_i\}_m$.

Tomando a parte inferior do sistema da equação (4.14), que surge por conta do enriquecimento do MEFG, tem-se que:

$$([K]_{mxn} \cdot \{\Phi_n\} + [K]_{mxm} \cdot \{\Phi_m\} - \lambda_i \cdot ([M]_{mxn} \cdot \{\Phi_n\} + [M]_{mxm} \cdot \{\Phi_m\})) = 0 \quad (4.41)$$

Reordenando os termos:

$$([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn}) \cdot \{\Phi_n\} = -([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm}) \cdot \{\Phi_m\} \quad (4.42)$$

Como no MEFG, a matriz $([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm})$ é não singular, então sua inversa existe e ao multiplicar os dois lados na igualdade (4.40) por $([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm})^{-1}$, tem-se Φ_m expresso por:

$$\{\Phi_m\} = -([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm})^{-1} \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn}) \cdot \{\Phi_n\} \quad (4.43)$$

O vetor transposto de Φ_m é:

$$\{\Phi_m^T\} = -\{\Phi_n^T\} \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn})^T \cdot ([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm})^{-1} \quad (4.44)$$

Substituindo (4.43) em (4.40) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx & \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn}) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K]_{n \times n} \cdot \{\Phi_i\}_n} + \\ & \left(\frac{\{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm}) \cdot ([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm})^{-1} \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn}) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K]_{n \times n} \cdot \{\Phi_i\}_n} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Isso é o mesmo que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i} \approx & \frac{-2 \cdot \{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn}) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K]_{n \times n} \cdot \{\Phi_i\}_n} + \\ & \left(\frac{\{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn}) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K]_{n \times n} \cdot \{\Phi_i\}_n} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \approx - \frac{\{\Phi_i^T\}_m \cdot ([K_{mxn}] - \lambda_i \cdot [M_{mxn}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n} \quad (4.47)$$

Substituindo a equação (4.44) em (4.47) e admitindo $\eta_i = \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}$:

$$\eta_i \approx \frac{\{\Phi_n^T\} \cdot ([K]_{mxn} - \lambda_i [M]_{mxn})^T \cdot (([K]_{mxm} - \lambda_i [M]_{mxm})^{-1})^T \cdot ([K_{mxn}] - \lambda_i \cdot [M_{mxn}]) \cdot \{\Phi_i\}_n}{(\{\Phi_i^T\}_n \cdot [K_{n \times n}] \cdot \{\Phi_i\}_n)} \quad (4.48)$$

A equação (4.48) é então uma estimativa para o erro do autovalor λ_i obtido ao aplicar o Método dos Elementos Finitos Generalizados, mas sem a necessidade de resolver o problema de autovalores e autovetores de dimensão $n + m$. Admitindo $m = 1$, ou seja, acrescentando uma única função em um dos elementos da malha original, o novo sistema passa a ter dimensão $n + 1$, assim a estimativa do erro passa a ser elementar. O indicador de Friberg também considera que, próximo à convergência, o autovetor aproximado tende ao autovetor exato $\{\Phi_i\} \approx \{\Phi_{exato}\}$.

De acordo com Friberg *et al.* (1987), quando são inseridas k -funções de forma no elemento j , o erro relativo do autovalor λ_i é aproximado pelo somatório dos η_k valores do estimador calculado para cada função isoladamente:

$$\eta = \sum_{k=1}^m \eta_k \quad (4.49)$$

Este somatório significa que o cálculo do estimador para o enriquecimento de k elementos de uma só vez (η), é equivalente a somar o valor do indicador quando este é calculado k vezes, uma para cada elemento da malha.

Em Friberg (1986), é definido que os valores do estimador são adimensionais e podem inclusive ser negativos para alguns casos. O autor ainda afirma que quanto mais positivo é o valor do estimador, maior será a variação no autovalor λ_i provocada pelo aumento do sistema.

De modo geral o estimador não pode ser utilizado para extrapolar a aproximação ou como um limite superior para o erro, devido ao η_i não expressar a ordem de grandeza do erro relativo. Mas, de acordo com Hager e Weiberg (1999) esta abordagem pode ser usada num processo iterativo para a seleção de elementos, com base na ativação de indicadores máximos positivos, que representam a maior mudança relativa de um autovalor alvo.

Portanto, neste trabalho, o estimador de Friberg (1986) é usado como um indicador do erro relativo para um autovalor pré-determinado, sendo sua aplicação realizada depois que uma aproximação inicial é obtida via MEF e quando se acrescenta os graus de liberdade de campo oriundos do enriquecimento do MEFG.

O indicador de Friberg determina uma aproximação para a variação relativa apresentada na equação (4.17), logo pela relação entre autovalor e frequência dada na equação (4.10), é possível afirmar que:

$$\eta_i \approx \frac{(\omega_i^n)^2 - (\omega_i^{n+m})^2}{(\omega_i^n)^2} \quad (4.50)$$

Baseando-se no fato apresentado por Friberg (1986) de que quanto maior for o valor do indicador, maior será a variação na aproximação do autovalor, a interpretação geométrica do valor adimensional do indicador considera η_i como a distância relativa em direção à solução analítica, causada pelo acréscimo no número de graus de liberdade. De acordo com Friberg *et al.* (1987), quando os valores do estimador tendem para valores máximos positivos, a solução aproximada converge para o autovalor exato.

A equação (4.46) foi apresentada por Duarte (2003) para a estimativa de erro relativo na aplicação do MEF p . O presente trabalho diferencia-se na extensão do método proposto anteriormente, fazendo as considerações necessárias para a utilização do indicador de erro em problemas de vibração livre de estruturas, aplicando o Método dos Elementos Finitos Generalizados.

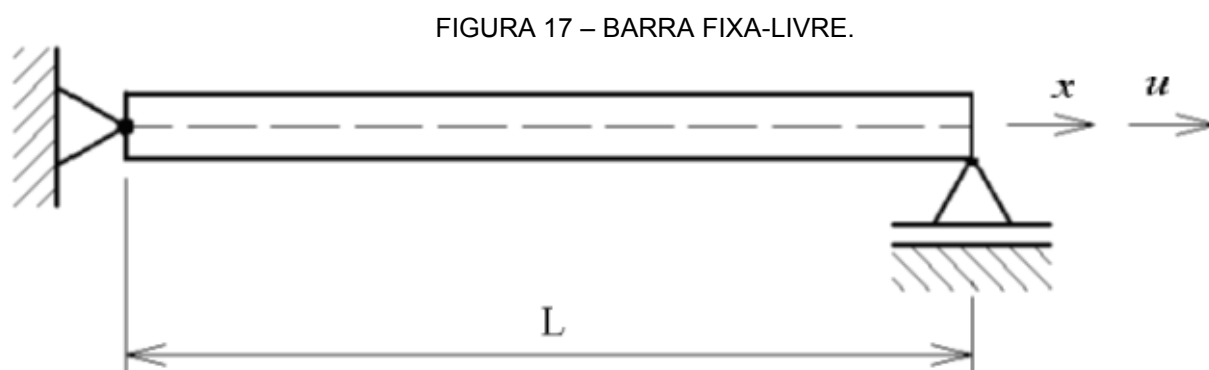
5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

As simulações numéricas de barras e treliça foram realizadas utilizando a linguagem Python versão 2.7. As integrações numéricas e os cálculos necessários para a determinação do indicador de Friberg foram realizados com rotinas das bibliotecas *scipy* e *numpy*. As simulações de vigas de Euler-Bernoulli foram realizadas no software Maple.

Foram realizadas simulações de vibração livre de barras com malhas uniformes e não uniformes, um caso de treliça plana e um caso de viga de Euler-Bernoulli, com o objetivo de destacar a capacidade do indicador de Friberg em apontar qual seria a variação relativa numa frequência, quando o MEFG é aplicado. Neste trabalho, a unidade de frequências naturais é *rad/s*.

5.1 Barra Fixa-Livre

O primeiro problema é o de obter algumas das frequências naturais de vibração de uma barra fixa-livre, proposta por Duarte (2003), onde o domínio do problema é discretizado por diferentes malhas. As características da barra são: comprimento 1 m , módulo de elasticidade 1 N/m^2 , área da seção transversal 1 m^2 e densidade 1 Kg/m^3 . A barra fixa-livre encontra-se ilustrada na figura 17.



FONTE: Arndt (2009).

5.1.1 Barra Fixa-Livre com Malha não Uniforme

A primeira malha não uniforme a ser analisada é formada por cinco elementos de comprimentos: $L_1 = 0,025$ m, $L_2 = 0,075$ m, $L_3 = 0,2$ m, $L_4 = 0,3$ m e $L_5 = 0,4$ m.

Primeiramente o MEF linear é aplicado e se obtém aproximações para as cinco primeiras frequências. Como para este problema a solução analítica é conhecida e encontram-se em Duarte (2003), os resultados para a solução aproximada e para a solução analítica são apresentados no quadro 1.

QUADRO 1 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E ANALÍTICO PARA MALHA NÃO UNIFORME.

Frequência	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
MEF (5 G.L.)	1,5933	5,1117	8,6829	14,6411	43,5442
ANALÍTICO	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372
ERRO RELATIVO	1,43%	8,47%	10,55%	33,15%	208,01%

As aproximações apresentadas no quadro 1 mostram que o maior erro ocorre na obtenção da frequência ω_5 . Partindo da característica de que o MEFG é uma boa ferramenta para aproximar as frequências mais altas, então o MEFG com um nível de enriquecimento ($\beta_j = 1\pi$) é aplicado em apenas um dos elementos da malha e quatro novos graus de liberdade de campo são inseridos, resultando em um sistema com nove graus da liberdade.

Então, o indicador de Friberg é calculado tendo como frequência alvo ω_5 . O valor encontrado para o indicador estima a variação gerada na quinta frequência ao resolver o sistema com nove graus de liberdade, no entanto sem a necessidade de resolvê-lo efetivamente. Porém neste trabalho, o problema é resolvido para verificar se há ou não uma relação entre o indicador de Friberg e a convergência da frequência alvo.

Em seguida, as funções de enriquecimento aplicadas ao elemento são removidas e o enriquecimento é realizado em outro elemento da malha, seguido novamente pelo cálculo do indicador Friberg e a solução do novo sistema com nove graus de liberdade.

Este procedimento é repetido até que todos os elementos da malha recebam o enriquecimento para comparar os valores do indicador com o objetivo de encontrar o elemento ou as regiões da malha onde o enriquecimento provoca a maior convergência da solução. O valor mais alto do indicador corresponde à maior variação na frequência alvo com a aplicação do refinamento. Os valores do indicador, as aproximações para ω_5 e o erro relativo calculado em relação à solução analítica são apresentados no quadro 2.

QUADRO 2 – RESULTADOS DO MEFG PARA MALHA NÃO UNIFORME

Elemento Enriquecido	η_i	ω_5 (MEFG 9 G.L.)	Erro Relativo
L_1	-0,0022	43,0698	204,65%
L_2	-3,2758	36,2884	156,68%
L_3	-0,0986	23,6423	67,23%
L_4	-0,0027	17,5002	23,78%
L_5	-0,0011	15,3571	8,62%

A partir do quadro 2 observa-se a eficiência do indicador de Friberg η_i em diagnosticar qual elemento apresenta a maior taxa de convergência ao aplicar-se as funções do MEFG localmente. É possível notar que ao acrescentar o enriquecimento do MEFG no quinto elemento L_5 , tem-se o maior valor para o indicador de Friberg e a melhor aproximação para ω_5 com 8,62% de erro. Se o enriquecimento for aplicado em qualquer outro elemento da malha, a aproximação obtida conterá um erro maior.

Porém, verifica-se que o elemento L_1 apresenta um valor maior para o indicador η_i do que deveria apresentar, pois a aproximação de ω_5 contém erro relativo de 204,65%. Isso, possivelmente, se deve à distorção da malha e ao elemento L_1 ser relativamente pequeno e por este estar no contorno, gerando uma matriz de massa que se aproxima de uma matriz não definida positiva, o que eleva o seu número de condição, tornando o sistema mais sensível. Por sua vez o cálculo do indicador também sofre efeito dessa perturbação, por utilizar parte do sistema original para calcular a variação relativa da frequência alvo. Assim o valor da

variação do erro relativo calculado é maior do que o esperado se for comparado com o valor da aproximação da quinta frequência que este enriquecimento produz. Para confirmar esse problema multiplica-se por 10^5 as matrizes de rigidez e massa, depois calculam-se novamente os valores do estimador, os resultados estão apresentados no quadro 3.

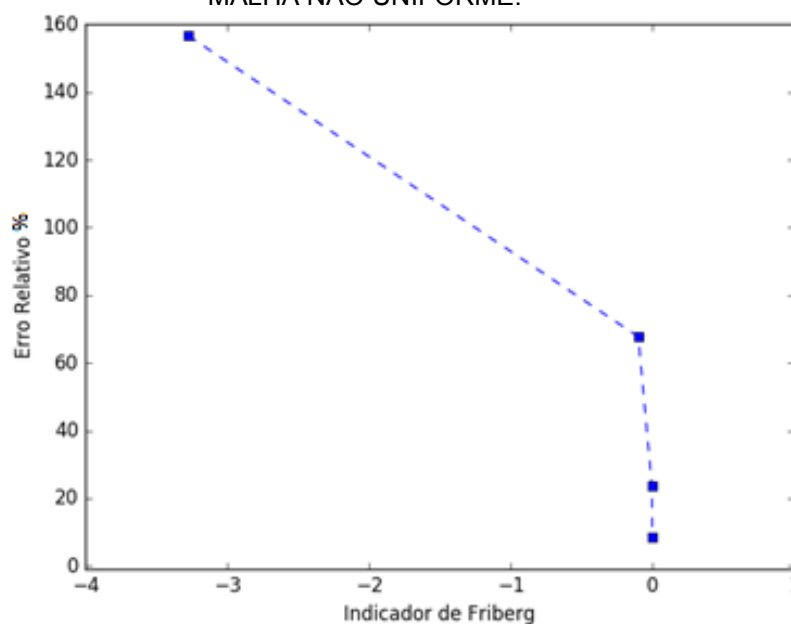
QUADRO 3 – INDICADOR DE FRIBERG COM MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ AMPLIFICADAS - PARA MALHA NÃO UNIFORME.

Elemento	η_i
L_1	-0,0812
L_2	-3,2758
L_3	-0,0986
L_4	-0,0027
L_5	-0,0011

Observa-se que com a multiplicação das matrizes envolvidas pela constante 10^5 o indicador η_1 passou de $\eta_1 = -0,0022$ para $\eta_1 = -0,0812$, enquanto os valores do indicador para todos os outros elementos permaneceram constantes. Outra justificativa para este problema é que o MEFG empregado utiliza o comprimento do elemento L_e dentro das funções de forma, então um elemento muito pequeno pode provocar problemas de sensibilidade, que afetam diretamente o cálculo do indicador.

Para esta análise foi desconsiderado o valor do indicador do primeiro elemento, haja visto que este se mostrou muito sensível. A figura 18 representa o comportamento do erro relativo em relação ao estimador de Friberg.

FIGURA 18 – RELAÇÃO DO INDICADOR DE FRIBERG COM O ERRO RELATIVO PARA MALHA NÃO UNIFORME.



Observa-se na figura 18 que o estimador não foi confiável em representar uma boa aproximação para o erro relativo, mas serviu para indicar qual o elemento fornece o resultado mais preciso ao realizar o enriquecimento com o MEFG localmente. Desta forma, é possível realizar uma seleção prévia de elementos a enriquecer pelo MEFG antes de enriquecer toda a malha, pois quanto maior o valor do indicador de Friberg maior será a contribuição daquele elemento para a convergência da aproximação.

Em seguida é feita a comparação entre o resultado do enriquecimento somente do quinto elemento com os resultados obtidos pelo MEF linear, pelo MEF-p Hierárquico com funções de forma quadráticas somente no quinto elemento e em todos os elementos (ver quadro 4).

QUADRO 4 – COMPARAÇÃO ENTRE MEF E MEFG PARA BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME

	MEF-linear	MEF-p	MEF-p(DUARTE, 2003)	MEFG
ω_5	43,5442	16,7151	16,2706	15,3571
G.L.	5	6	10	9
Erro Relativo	208,0%	18,2%	15,1%	8,6%

Constatou-se que o MEF linear com cinco graus de liberdade apresenta um erro de 208,0%, enquanto que o MEF-p Hierárquico com dez graus de liberdade apresenta um erro de 15,1%. O MEFG com nove graus de liberdade apresenta um erro relativo de 8,6%, mas a diferença é que foram colocadas quatro funções de forma diferentes somente no quinto elemento e os outros elementos da malha não receberam nenhuma função a mais. Isso demonstra o potencial da utilização do MEFG em conjunto com o indicador de Friberg, pois mesmo este caso sendo relativamente simples, houve um ganho em precisão, convergência e redução da dimensão das matrizes envolvidas.

Neste caso, a aplicação do indicador de erro de Friberg no MEFG permitiu escolher o elemento da malha que deve receber novos graus de liberdade para que haja melhora na aproximação da frequência alvo. O erro relativo da aproximação obtida usando o MEF-p com seis graus de liberdade (sendo cinco graus de liberdade oriundos do MEF linear e um do MEF-p colocado somente no quinto elemento L_5) reduziu o erro relativo em 189,8%. Ao se aplicar o MEF-p com dez graus de liberdade (onde cinco provém do MEF linear e cinco oriundos do MEF-p que acrescenta um grau de liberdade em cada elemento) faz o erro relativo decair 192,92%, o que representa um ganho de 3,14% quando os elementos L_1 , L_2 , L_3 e L_4 recebem novos graus de liberdade.

Seria muito custoso alcançar esse resultado sem o uso do estimador, pois o sistema teria de ser resolvido cinco vezes, mas com o estimador torna-se possível identificar em qual dos elementos da malha o enriquecimento terá maior convergência, sem a necessidade de resolver um sistema para cada enriquecimento local e depois fazer a comparação.

Baseando-se no fato de que o estimador de Friberg pode identificar os elementos onde o erro apresentado é menor, então pode ser realizado o enriquecimento do MEFG onde o indicador apontar os maiores valores, com o objetivo de diminuir o tamanho dos sistemas envolvidos, sem comprometer a acurácia da aproximação.

Na sequência acrescentam-se as funções de forma do MEFG no quinto elemento e depois no quarto, mas sem retirar as funções do elemento anterior, repetindo o processo em ordem decrescente do indicador de Friberg até que todos

os elementos recebam as funções enriquecedoras do primeiro nível do MEFG. Os resultados para ω_5 estão apresentados no quadro 5.

QUADRO 5 – ERRO RELATIVO PERCENTUAL COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE NO MEFG – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME

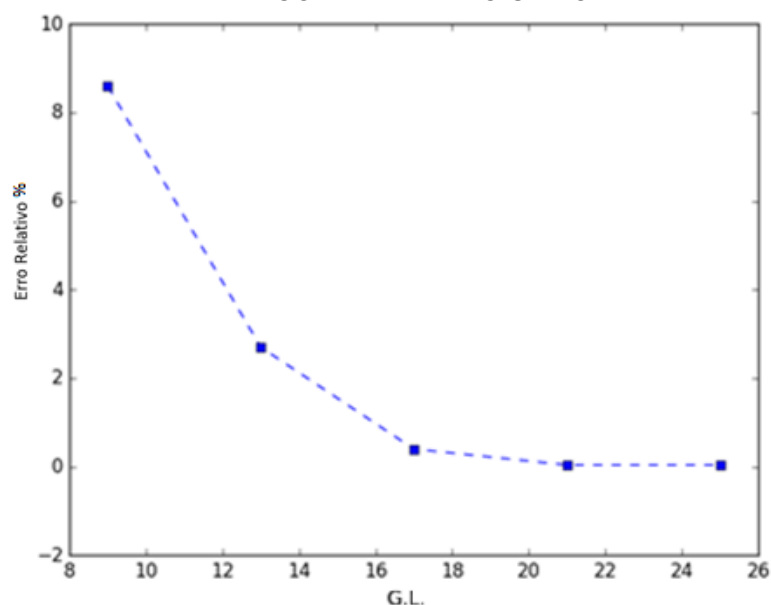
Elementos Enriquecidos	G.L.	ω_5 (MEFG)	Erro Relativo
5º	9	15,3571	8,6%
5º , 4º	13	14,5270	2,7%
5º , 4º, 3º	17	14,1945	0,4%
5º , 4º, 3º, 2º	21	14,1438	0,04%
Todos	25	14,1437	0,04%

Constata-se que a aproximação obtida utilizando o MEF com cinco graus de liberdade foi de $\omega_5 = 43,5442 \text{ rad/s}$, com um erro relativo de 208,0 %. Já a aproximação usando o MEFG com vinte e cinco graus de liberdade, onde toda a malha é enriquecida, foi $\omega_5 = 14,1437 \text{ rad/s}$ com um erro relativo de 0,04%.

Com o enriquecimento de todos os elementos da malha, a solução aproximada ficou bem próxima da analítica, sendo que a aproximação com vinte e cinco graus de liberdade para o MEFG é $\omega_5 = 14,1437 \text{ rad/s}$ e para o MEF-p com o mesmo número de graus de liberdade $\omega_5 = 14,1449 \text{ rad/s}$, ou seja, para este caso a aproximação oriunda do MEFG é melhor do que a obtida com o MEF-p.

A convergência da aproximação pode ser observada a partir da relação entre o número de graus de liberdade e o erro relativo, expressas na figura 19.

FIGURA 19 – ERRO RELATIVO EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME.



É possível observar que existe uma perda na taxa de convergência da aproximação à medida que as funções do MEFG vão sendo colocadas em elementos onde o indicador foi menor. Com treze graus de liberdade o erro obtido foi de 2,7% e a partir deste ponto o ganho na aproximação da solução se torna pequeno se comparado com o aumento do número de graus de liberdade.

A convergência do quinto modo de vibração é apresentada na figura 20 e figura 21, onde as aproximações são comparadas com a solução analítica que é encontrada em Duarte (2003).

FIGURA 20 – RESULTADO PARA O QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO (COM 9 G. L.) – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME.

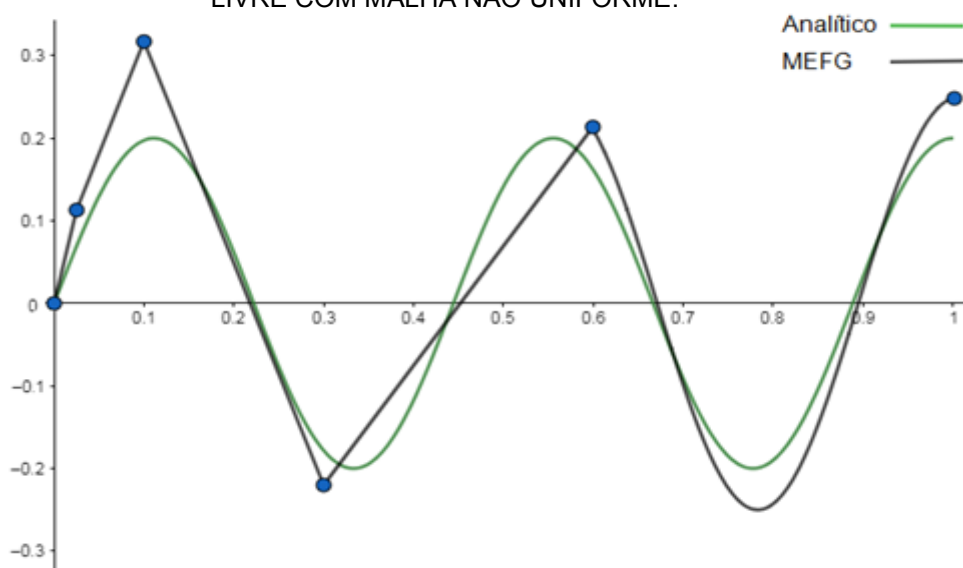
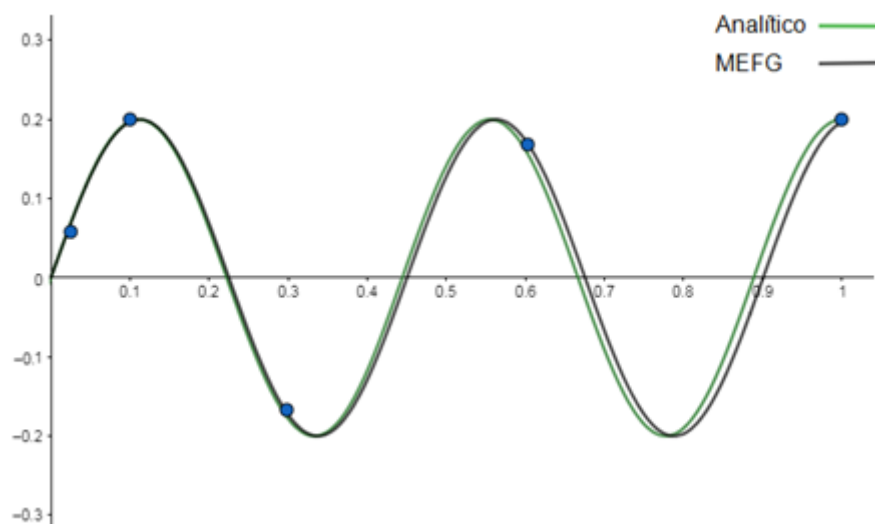


FIGURA 21 – RESULTADO PARA O QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO (COM 25 G. L.) – BARRA FIXA-LIVRE COM MALHA NÃO UNIFORME.



O condicionamento das matrizes envolvidas também foi analisado, utilizando para isso a norma Euclidiana, apresentada em Petroli (2016). Para o sistema com nove graus de liberdade o número de condição da matriz de rigidez é $6,1886 \cdot 10^{17}$ e para a matriz de massa $2,6348 \cdot 10^9$, enquanto que para o sistema com vinte e cinco graus de liberdade o número de condição da matriz de rigidez passa a ser $1,1301 \cdot 10^{19}$ e da matriz de massa $3,9124 \cdot 10^{18}$. Nota-se que para a matriz de rigidez o aumento no número de condição não é tão significativo se comparado ao aumento do número de condição que ocorre na matriz de massa, que praticamente dobra a potência do valor inicial.

A grandeza do número de condição da matriz de massa pode ser usado para estimar a precisão necessária na construção da matriz de massa e também ser empregado na comparação da estabilidade numérica do método empregado (PETROLI, 2016). O aumento no número de condição de uma matriz pode gerar instabilidade no problema e afetar a aproximação da solução, logo é interessante trabalhar com matrizes com um número de condição menor, pois há mais garantia de um bom condicionamento do sistema.

Com o objetivo de verificar a equação (4.49), realiza-se o enriquecimento de dois elementos da malha diferentes, e calcula-se o indicador η_i para cada caso. Então o problema é resolvido e obtém-se uma aproximação para a quinta frequência. Os resultados estão no quadro 6.

QUADRO 6 – COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DO INDICADOR DE FRIBERG PARA O ENRIQUECIMENTO DE DOIS ELEMENTOS DA MALHA NÃO UNIFORME.

Elementos Enriquecidos	η_i	η_1	η_2	$\eta_1 + \eta_2$	$\omega_5(\text{MEFG})$
4° e 5°	-0,0038	-0,0027	-0,0011	-0,0038	14,5270
3° e 5°	-0,0998	-0,0986	-0,0011	-0,0998	14,9733
3° e 4°	-0,1012	-0,0986	-0,0027	-0,1012	16,9487
2° e 4°	-3,2785	-3,2758	-0,0027	-3,2785	17,3365
2° e 3°	-3,3785	-3,2758	-0,0986	-3,3785	22,7014

A equação (4.49) é verificada, pois $\eta_i = \eta_1 + \eta_2$. Também observa-se que a primeira combinação de elementos enriquecidos, onde os elementos enriquecidos são o quarto e o quinto, é a que apresenta o maior valor para o estimador de Friberg e a melhor aproximação para ω_5 .

Há de se ressaltar que deve se ter muito cuidado ao comparar enriquecimentos de um número diferente de elementos, pois $\eta_{4+5} < \eta_5$ pelo fato de o sinal ser negativo, teoricamente isso implica que o enriquecimento dos elementos L_4 e L_5 simultaneamente resulta numa aproximação pior do que o enriquecimento apenas do elemento L_5 , afirmativa esta que não tem veracidade.

5.1.2 Barra Fixa-Livre com Malha Uniforme

O problema do exemplo 5.1 será analisado com uma malha uniforme, composta por dez elementos de comprimento $L_i = 0,1 \text{ m}$. Os resultados para o MEF linear e malha uniforme estão apresentados no quadro 7.

QUADRO 7 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E ANALÍTICO PARA MALHA UNIFORME.

Frequência	MEF	Analítico	Erro Relativo
ω_1	1,5724	1,5708	0,10%
ω_2	4,7561	4,7124	0,92%
ω_3	8,0570	7,8540	2,58%
ω_4	11,5541	10,9956	5,07%
ω_5	15,3202	14,1372	8,36%
ω_6	19,4000	17,2787	12,27%
ω_7	23,7547	20,4203	16,32%
ω_8	28,1465	23,5619	19,45%
ω_9	31,9858	26,7035	19,78%
ω_{10}	34,3235	29,8451	15,00%

As aproximações obtidas via MEF mostram que as primeiras frequências estão mais próximas da solução analítica, sendo que a frequência com o maior erro relativo é ω_9 . A frequência escolhida como alvo é ω_{10} , já que normalmente os problemas reais não possuem solução analítica, onde não se pode calcular o erro relativo da forma realizada no quadro 7.

Aplicando o MEFG localmente, com um nível de enriquecimento, calcula-se o indicador de Friberg e soluciona-se o problema de autovalores sempre que um dos elementos recebe as novas funções de forma. Os resultados são apresentados no quadro 8.

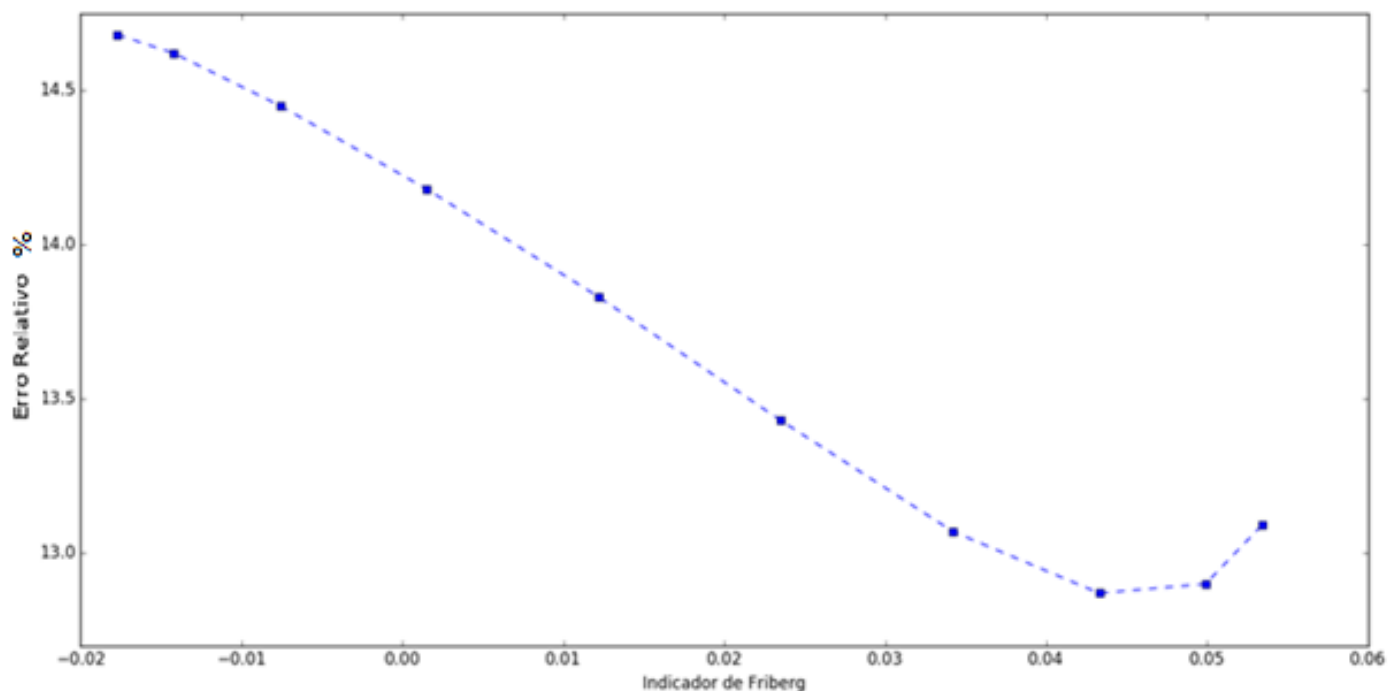
QUADRO 8 – RESULTADOS DO MEFG PARA MALHA UNIFORME.

Elemento Enriquecido	η_i	ω_{10} (MEFG 14 G.L.)	Erro Relativo
L_1	-0,0177	34,2278	14,68%
L_2	-0,0142	34,2102	14,62%
L_3	-0,0076	34,1580	14,45%
L_4	0,0015	34,0788	14,18%
L_5	0,0122	33,9751	13,83%
L_6	0,0235	33,8556	13,43%
L_7	0,0342	33,7469	13,07%
L_8	0,0433	33,6883	12,87%
L_9	0,0499	33,6969	12,90%
L_{10}	0,0534	33,7535	13,09%
Exato	-	29,8451	-

A aproximação encontrada para a décima frequência com o MEF contém um erro relativo de 15,00%, enquanto que ao utilizar o MEFG com enriquecimento local de apenas um dos elementos, no melhor caso, o erro relativo cai para 12,87%.

Pode-se pensar que cada elemento apresenta a mesma contribuição, mas não é isso que ocorre, pois apesar de cada elemento da malha conter as mesmas características, encontram-se diferentes resultados para a frequência alvo no enriquecimento local. Os valores do indicador representam com sucesso a contribuição na convergência da frequência alvo para os oito primeiros elementos da malha, mas para L_9 e L_{10} o valor de η_i é maior do que deveria ser, embora sejam valores muito próximos e as aproximações encontradas variam 0,03% e 0,22% respectivamente. Esse comportamento pode ser observado na figura 22.

FIGURA 22 – RELAÇÃO ENTRE O INDICADOR DE FRIBERG E O ERRO RELATIVO PARA MALHA UNIFORME.



Ao aplicar o MEFG com um nível de enriquecimento com $\beta = 1\pi$ em todos os elementos da malha, a aproximação para a décima frequência é $\omega_{10} = 29,84519584$, e contém um erro relativo de $2,19 \cdot 10^{-6} \%$.

Com o objetivo de analisar a escolha de um parâmetro $\beta = j\pi$, que aumente a precisão na aproximação, varia-se o mesmo de $\beta = 1\pi$ a 15π . O indicador η_i é então calculado para verificar se este aponta qual a melhor aproximação para o parâmetro β . Os resultados encontram-se no quadro 9.

QUADRO 9 – RESULTADOS DO MEFG PARA A VARIAÇÃO DO PARÂMETRO β PARA MALHA UNIFORME.

j	η_i	ω_{10} (MEFG 50 G.L.)	Erro Absoluto
1	0,1786582	29,84519584	0,00006563
2	0,1786614	29,84518763	0,00005742
3	0,1786630	29,84517582	0,00004561
4	0,1786658	29,84516240	0,00003219
5	0,1786686	29,84514971	0,00001950
6	0,1786711	29,84513971	0,00000950
7	0,1786725	29,84513346	0,00000325
8	0,1786742	29,84513076	0,00000055
9	0,1786748	29,84513022	0,00000001
10	0,1786751	29,84513021	0,00000000
11	0,1786750	29,85513134	0,00000113
12	0,1786750	29,84514123	0,00001102
13	0,1786744	29,84518321	0,00005300
14	0,1786713	29,84531069	0,00018048
15	0,1786607	29,84563014	0,00049993
Analítico	-	29,84513021	0,0

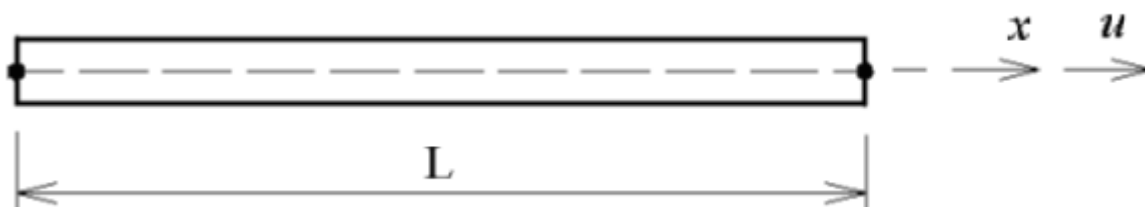
Conforme o valor de β aumenta de 1π até 10π , o erro absoluto decresce e a aproximação chega na solução analítica para $\beta = 10\pi$, depois disso, para β entre 11π até 15π o erro absoluto volta a crescer. Esta tendência é descrita pelo indicador de Friberg, pois o maior valor do indicador é onde se encontra a melhor aproximação. Logo o indicador de Friberg pode ser utilizado também para indicar qual o melhor parâmetro para realizar o enriquecimento.

5.2 Barra Livre-Livre com Malha Uniforme

Nesta seção é analisada uma barra livre-livre (figura 23), sujeita à vibração livre, com as seguintes características: comprimento 1 m , módulo de elasticidade $1 \frac{N}{m^2}$, área da seção transversal 1 m^2 e densidade $1 \frac{Kg}{m^3}$. A barra foi dividida em cinco elementos de mesmo tamanho: $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = 0,2\text{ m}$. Os resultados para o MEF linear com seis graus de liberdade estão apresentados no quadro 10. Sabe-

se que para o caso de barra livre-livre, a primeira frequência $\omega_1 = 0$, portanto a análise é feita a partir da segunda frequência.

FIGURA 23 – BARRA UNIFORME LIVRE-LIVRE



Fonte: Arndt (2009).

QUADRO 10 – RESULTADOS DO MEF LINEAR E ANALÍTICO PARA BARRA LIVRE-LIVRE.

Frequência	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
MEF	3,1934	6,6998	10,7757	15,0943	17,3205
Analítico	3,1415	6,2831	9,4247	12,5663	15,7079
Erro Relativo	0,1%	6,6%	14,3%	20,11%	10,2%

Constata-se que o MEF apresenta um erro maior na aproximação de ω_5 , logo esta frequência foi escolhida para o cálculo do estimador. Então aplica-se o MEFG localmente. Os resultados estão apresentados no quadro 11.

QUADRO 11 – RESULTADOS PARA INDICADOR DE FRIBERG MEFG LOCALMENTE PARA BARRA LIVRE-LIVRE.

Elemento Enriquecido	η_i	$\omega_5(\text{MEFG } 10 \text{ G.L.})$	Erro Relativo
L_1	0,1433	14,6889	16,9%
L_2	0,6364	14,5110	15,5%
L_3	0,9411	14,3332	14,1%
L_4	0,6364	14,5110	15,5%
L_5	0,1433	14,6889	16,9%

Devido à simetria do problema de vibração livre de uma barra livre-livre e à malha uniforme, a aproximação encontrada ao enriquecer o elemento L_1 é igual a encontrada com o enriquecimento do elemento L_5 , e a aproximação obtida com o enriquecimento de L_2 é a mesma encontrada com o enriquecimento de L_4 . O indicador de Friberg também apresentou a mesma tendência, o que já era esperado, caso contrário a confiabilidade do indicador diminuiria. O elemento que obteve a melhor aproximação para a frequência alvo ω_5 ao ser enriquecido foi L_3 , que por sua vez apresenta o maior valor para η_i .

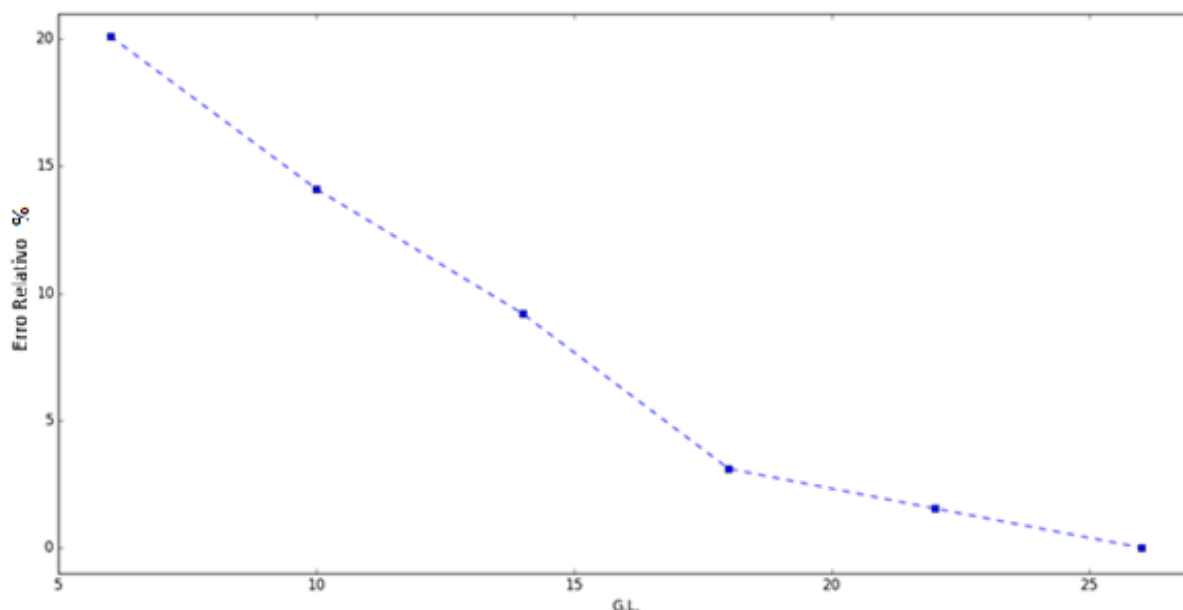
Então, aplica-se o MEFG com um nível de enriquecimento $\beta_j = 1\pi$ em todos os elementos da malha, seguindo a ordem decrescente do indicador, conforme resultados no quadro 12.

QUADRO 12 – ERRO RELATIVO COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE PARA BARRA LIVRE-LIVRE.

Elementos Enriquecidos	MEFG (ω_5)	Erro Relativo
L_3	14,3332	14,1%
L_3 e L_2	13,7085	9,2%
L_3, L_2 e L_4	12,9551	3,1%
L_3, L_2, L_4 e L_1	12,7604	1,5%
Todos	12,5663	$3,45 \cdot 10^{-5}\%$

Constata-se que a contribuição de cada elemento é importante para a convergência da frequência alvo. Como os valores do indicador de Friberg para todos os cinco elementos apresentam a mesma ordem de grandeza, a tendência é que a contribuição de cada elemento seja relevante. O comportamento do erro relativo em função do número de graus de liberdade é apresentado na figura 24.

FIGURA 24 – RELAÇÃO ENTRE O NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE E O ERRO RELATIVO PARA BARRA LIVRE-LIVRE.



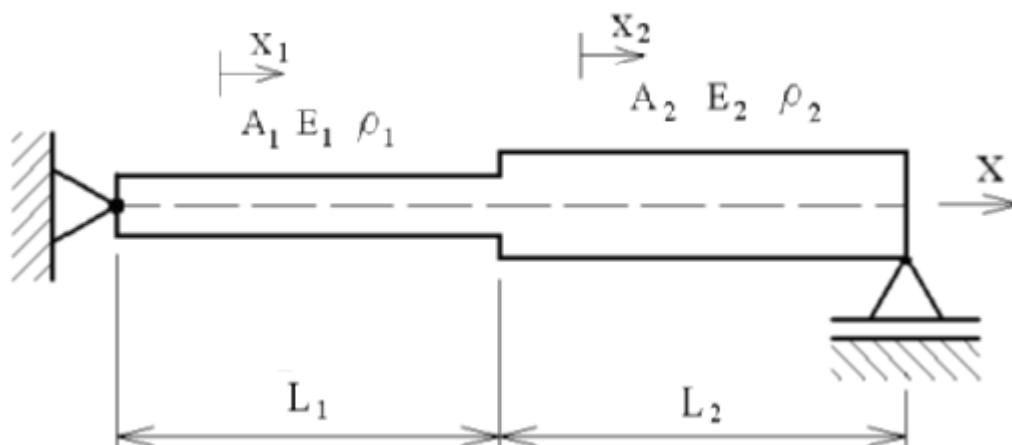
Neste caso a solução aproximada atingiu um erro relativo de $3,45 \cdot 10^{-7}$, mas como observado existem elementos que contribuem mais do que outros, logo é viável que estes elementos recebam maior atenção durante o enriquecimento.

Então o MEFG é aplicado novamente, mas desta vez os elementos da malha recebem diferentes valores para β_j , de acordo com os valores do indicador de Friberg, onde: L_3 recebe $\beta_j = 3\pi$, L_2 e L_4 recebem $\beta_j = 2\pi$ e L_1 e L_5 recebem $\beta_j = \pi$. Este procedimento resulta em pequena melhora na aproximação de ω_5 , com um erro relativo de $1,23 \cdot 10^{-7}$.

5.3 Barra Bi-Material com Malha Uniforme

Nesta seção será analisada uma barra fixa-livre composta por dois materiais distintos com variação abrupta de seção transversal (figura 25), sujeita à vibração livre.

FIGURA 25 – BARRA FIXA-LIVRE BIMATERIAL



Fonte: Arndt (2009).

A barra foi dividida em dois elementos com as seguintes características: comprimento $L_1 = L_2 = 1 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E_1 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ e $E_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, área da seção transversal $A_1 = 1 \text{ m}^2$ e $A_2 = 2 \text{ m}^2$, densidade $\rho_1 = 1 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ e $\rho_2 = 8 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$. Ao aplicar o MEF linear na barra, com dois graus de liberdade. Foram obtidas as aproximações para as duas primeiras frequências e comparadas com a solução analítica de Arndt (2009), apresentadas no quadro 13.

QUADRO 13 – RESULTADOS DO MEF LINEAR PARA BARRA BI-MATERIAL.

Frequência	MEF	Analítica	Erro Relativo
ω_1	0,24013389	0,23794112	0,92%
ω_2	1,73206715	1,57079632	10,26%

Dentre as aproximações, o maior erro relativo é de 10,26% na obtenção de ω_2 . Então o MEFG é aplicado localmente com um nível de enriquecimento e $\beta = 1\pi$, tendo a segunda frequência como alvo para o cálculo do indicador de Friberg. Os resultados são apresentados no quadro 14.

QUADRO 14 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA BARRA BI-MATERIAL.

Elemento Enriquecido	η_i	ω_2 (MEFG 6 G.L.)	Erro Relativo
L_1	0,0165	1,71822379	9,39%
L_2	0,2651	1,57754874	0,43%
Analítico	-	1,5707	-

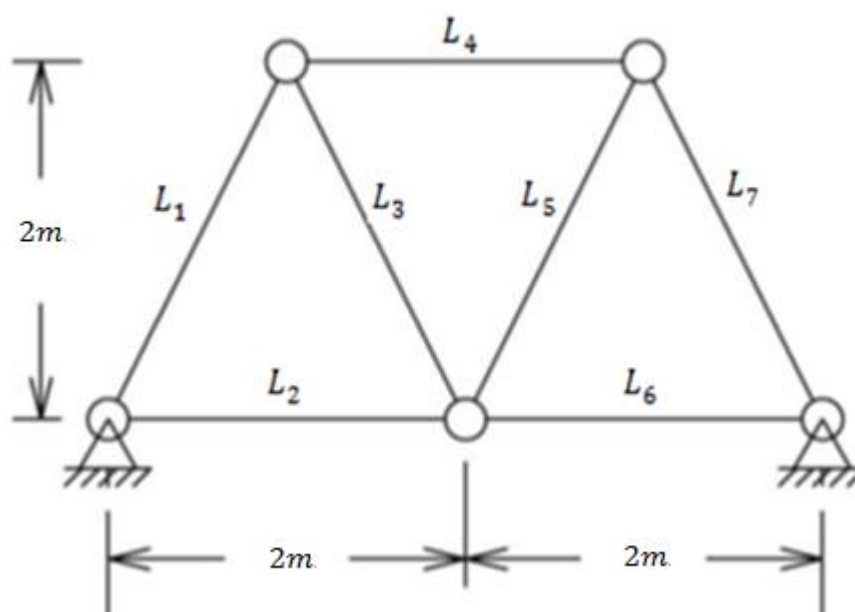
Mais uma vez, a aplicação do indicador obteve bons resultados, visto que a adição das funções de enriquecimento do MEFG no primeiro elemento reduz o erro relativo da segunda frequência para 9,39% e o valor do indicador Friberg neste elemento é menor do que o valor do indicador calculado para o segundo elemento. A adição das funções MEFG no segundo elemento produz uma redução no erro relativo para 0,43%, para um sistema com seis graus de liberdade

Quando os dois elementos L_1 e L_2 são enriquecidos ao mesmo tempo com as funções do MEFG, obtém-se a aproximação $\omega_2 = 1,57685678$ e o erro relativo é de 0.38%, porém o sistema passa a ter dez graus de liberdade. Ou seja, o erro relativo obtido enriquecendo apenas o elemento L_2 fornece uma solução muito próxima do enriquecimento dos dois elementos, com um número menor de graus de liberdade.

5.4 Treliza Plana

Para a simulação numérica de treliças planas adota-se o caso de vibração livre de uma treliça com sete barras proposta por Zeng (1998-a). A geometria da estrutura é ilustrada na figura 26, sendo discretizada por sete elementos. As características das barras são: área da seção transversal $A = 0,001m^2$, massa específica $\rho = 8000 \frac{kg}{m^3}$ e módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^{11} N/m^2$.

FIGURA 26 – TRELIÇA PLANA COMPOSTA POR SETE BARRAS.



A estrutura possui cinco nós, onde cada um contém dois graus de liberdade. Com a imposição das condições de contorno restringem-se quatro graus de liberdade, então ao aplicar o MEF com funções lineares e seis graus de liberdade obtém-se seis frequências aproximadas, que são comparadas com os resultados encontrados com o MEF- p por Cittadin (2017), que utiliza 77 graus de liberdade na análise, correspondentes a sete elementos com funções de forma de grau dez.

QUADRO 15 – RESULTADOS DO MEF-LINEAR E MEF- p PARA TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	MEF-linear (6 G.L.)	MEF- p (77 G.L.)
ω_1	1683,5214	1647,7844
ω_2	1776,2784	1740,8397
ω_3	3341,3752	3111,3227
ω_4	5174,3538	4561,8173
ω_5	5678,1845	4823,2486
ω_6	8315,4006	7379,4823

As seis aproximações obtidas via MEF-linear podem conter um erro elevado e como este método converge com valores superiores aos valores exatos, quanto menor for a aproximação mais próximo da solução exata ela estará, conforme afirma Carey e Oden (1984). Então o MEFG é aplicado, com $\beta = 1\pi$ e um nível de enriquecimento, com o objetivo de melhorar as aproximações encontradas anteriormente.

Mas a aplicação do método enriquecido não é realizada de forma convencional, pois é escolhida uma frequência alvo e o indicador de Friberg é usado para analisar a contribuição de cada elemento ao receber as funções de enriquecimento do MEFG. Para isso é enriquecido o primeiro elemento da malha L_1 e depois é calculado o valor do indicador de Friberg, desta forma tem-se uma estimativa para a variação relativa da frequência alvo.

Para verificar se o valor do indicador possui relação com o erro relativo, o novo sistema é solucionado, encontrando-se uma nova aproximação para a frequência desejada. Mas num processo prático, o novo sistema não precisa ser solucionado, pois o indicador aqui abordado possui a propriedade de realizar uma projeção adimensional da variação relativa de uma determinada frequência, sem que o novo sistema seja resolvido.

Em seguida, são retiradas as funções enriquecedoras do elemento L_1 e colocadas no elemento L_2 , novamente o indicador de Friberg é calculado para medir a contribuição deste novo elemento, sendo que este novo sistema também é resolvido. Este processo é repetido até que todos os sete elementos recebam as funções do MEFG, um de cada vez. No final obtém-se sete valores para o indicador e pode-se realizar a comparação, de modo que o elemento que apresentar o maior valor do indicador deverá ser o elemento que contribui mais para a convergência da aproximação como será verificado a seguir.

5.4.1 Frequência Alvo ω_1

As aproximações para a primeira frequência e os valores do indicador de Friberg são apresentados no quadro 16, lembrando que a aproximação encontrada pelo MEF linear foi de $\omega_1 = 1683,5214 \text{ rad/s}$.

QUADRO 16 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA ω_1 – TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	η_i	ω_1 (MEFG 10 G.L.)
L_1	0,0023	1681,5380
L_2	1,2586e-33	1683,5214
L_3	0,0202	1666,6351
L_4	4,6932e-05	1683,4819
L_5	0,0202	1666,6351
L_6	1,2586e-33	1683,5214
L_7	0,0023	1681,5380

O indicador apresenta os maiores valores para o elemento L_3 e o elemento L_5 , e estes são os que apresentam a maior contribuição para a convergência da aproximação. Ao analisar o valor das aproximações encontradas na resolução do sistema observa-se que quando o elemento L_3 ou o elemento L_5 é enriquecido, constata-se o que o indicador obtém sucesso, pois obtém-se a melhor aproximação para ω_1 . Também se observa que ao enriquecer o elemento L_2 ou o elemento L_6 , obtém-se a mesma aproximação obtida com o MEF-linear, ou seja, o enriquecimento destes elementos não altera a aproximação da frequência alvo, sendo estes os elementos que apresentam os menores valores para o indicador η_i .

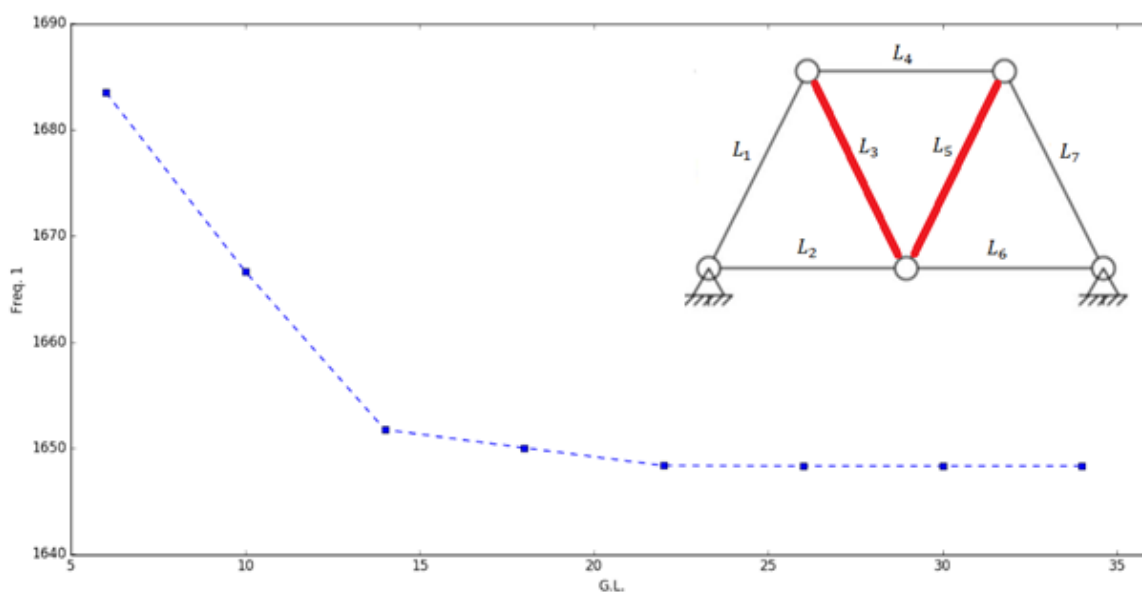
É importante ressaltar que os valores do indicador de Friberg são iguais para os pares de elementos (L_3, L_5) , (L_2, L_6) e (L_1, L_7) , devido à simetria da estrutura. Os valores do indicador apontam de maneira satisfatória este fenômeno, caso contrário não haveria segurança ao utilizar o indicador neste processo seletivo.

Então, aplica-se o MEFG em todos os elementos da malha, seguindo a ordem decrescente dos valores do indicador: L_3 , L_5 , L_1 , L_7 , L_4 , L_2 e L_6 . Cada vez que um elemento recebe as funções do MEFG, o novo sistema é solucionado com o objetivo de verificar a convergência da aproximação. Os resultados encontram-se no quadro 17.

QUADRO 17 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA ω_1 – TRELIÇA PLANA.

Elementos Enriquecidos	ω_1 (MEFG)
L_3	1666,6351
L_3, L_5	1651,7579
L_3, L_5, L_1	1650,0392
L_3, L_5, L_1, L_7	1648,3679
L_3, L_5, L_1, L_7, L_4	1647,7854
$L_3, L_5, L_1, L_7, L_4, L_2$	1647,7854
Todos	1647,7854
MEF- p (77 G.L.)	1647,7844

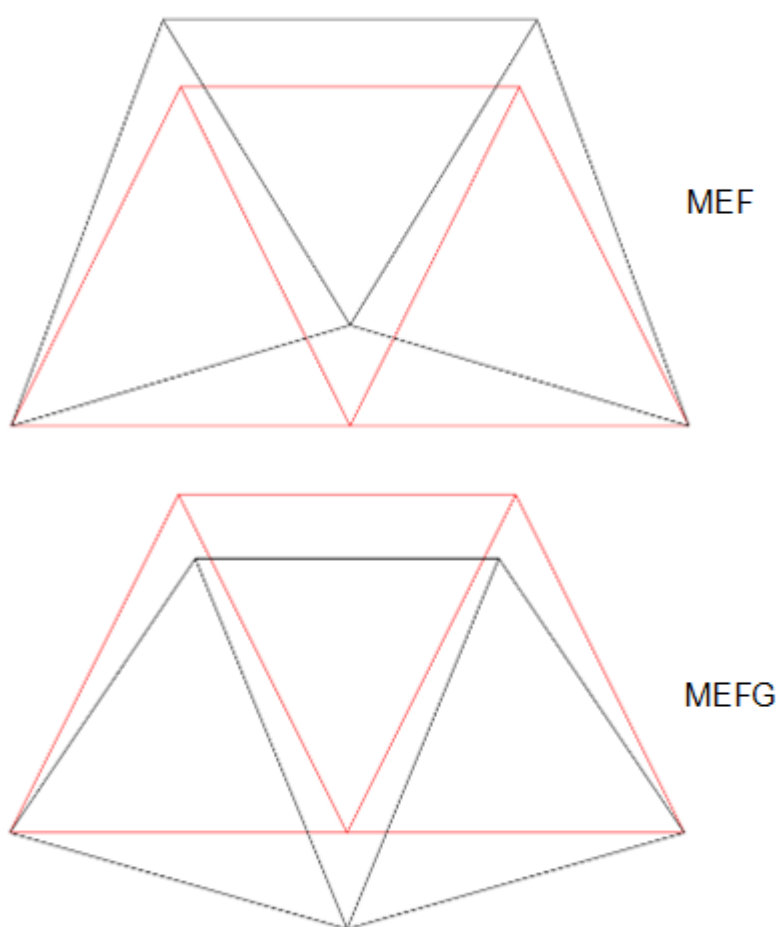
Os resultados mostram que a solução aproximada apresenta convergência quando os cinco primeiros elementos são enriquecidos, porém com o enriquecimento dos elementos L_2 e L_6 a aproximação não apresenta variações, isso se deve ao fato de que eles apresentam valores muito pequenos para o indicador de Friberg, ou seja, a melhora na frequência alvo é imperceptível. A convergência de ω_1 também pode ser observada na relação entre o decaimento da frequência aproximada e o aumento no número de graus de liberdade, apresentada na figura 27.

FIGURA 27– DECAIMENTO DE ω_1 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE.

Observa-se que a aproximação da primeira frequência obtida com 26 graus de liberdade é muito próxima da obtida com 34 graus de liberdade, pois de acordo com o indicador de Friberg, o enriquecimento dos elementos onde o valor de η_i é pequeno, implica que a contribuição que este elemento possui na convergência da solução também é pequena. Mesmo em um exemplo com pouca complexidade como o aqui abordado, o sistema global pode ser reduzido em aproximadamente 23,6% sem comprometer a qualidade da aproximação.

O primeiro modo de vibração encontrado com o MEF (6 G.L.) e com o MEFG (34 G.L.) é ilustrado na figura 28, onde observa-se também a simetria do modo analisado.

FIGURA 28 – PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO ENCONTRADO COM O MEF (6 G.L.) E COM O MEFG (26 G.L.).



5.4.2 Frequência Alvo ω_2

Os indicadores de Friberg e as aproximações para a segunda frequência ao se aplicar o MEFG local são apresentados no quadro 18, lembrando que a aproximação encontrada com o MEF linear foi de $\omega_2 = 1776,2784$.

QUADRO 18 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA ω_2 – TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	η_i	$\omega_2(\text{MEFG})$
L_1	0,0015	1774,9046
L_2	0,0004	1775,8938
L_3	0,0042	1773,2236
L_4	0,0301	1750,8725
L_5	0,0042	1773,2236
L_6	0,0004	1775,8938
L_7	0,0015	1774,9046

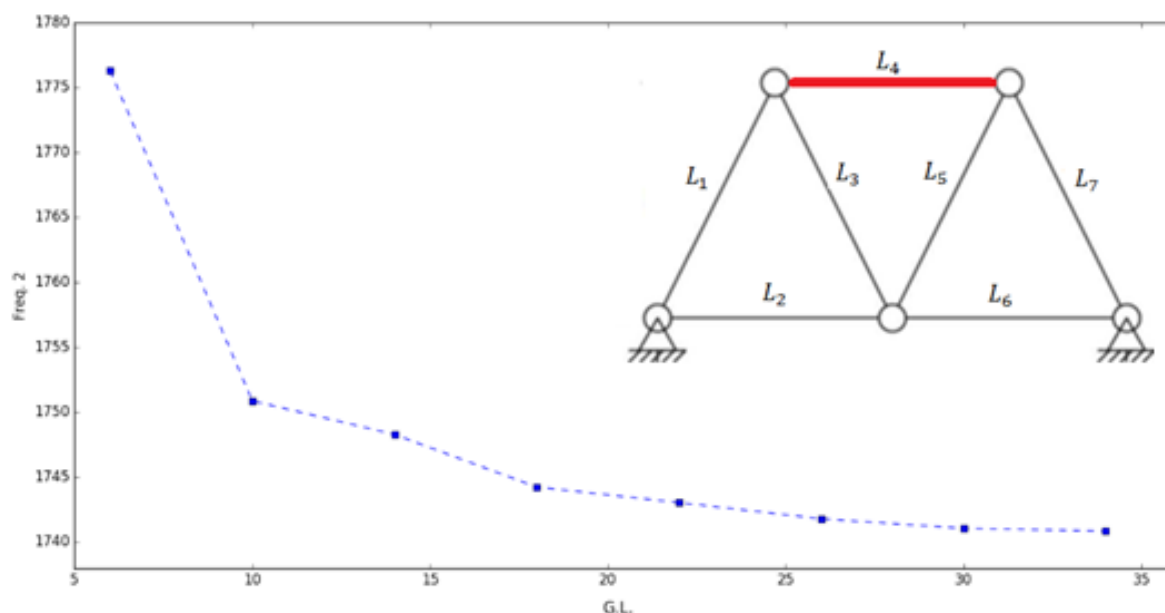
O enriquecimento do elemento L_4 é o que apresenta a melhor aproximação para a frequência ω_2 . Isso pode ser observado tanto pelo valor do indicador de Friberg, quanto pelo valor da aproximação $\omega_2 = 1750,8725$. Quando são enriquecidos o elemento L_2 ou o elemento L_6 , a aproximação fica muito próxima da encontrada com o MEF linear, ou seja, a variação ocorrida na frequência alvo é pequena.

Então o MEFG é aplicado em todos os elementos da malha de forma seletiva seguindo a ordem decrescente do indicador. Os resultados são apresentados no quadro 19.

QUADRO 19 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA ω_2 – TRELIÇA PLANA.

Elementos Enriquecidos	ω_2 (MEFG)
L_4	1750,8725
L_4, L_3	1748,2783
L_4, L_3, L_5	1744,2330
L_4, L_3, L_5, L_1	1743,0374
L_4, L_3, L_5, L_1, L_7	1741,7892
$L_4, L_3, L_5, L_1, L_7, L_2$	1741,0571
Todos	1740,8403
MEF-p (77 G.L.)	1740,8397

Observa-se que neste caso todos os elementos da malha contribuem para a convergência da aproximação de ω_2 , mas a contribuição de cada um é diferente como apontou o indicador de Friberg. A convergência da aproximação para ω_2 pode ser relacionada com o acréscimo do número de graus de liberdade, conforme mostra a figura 29.

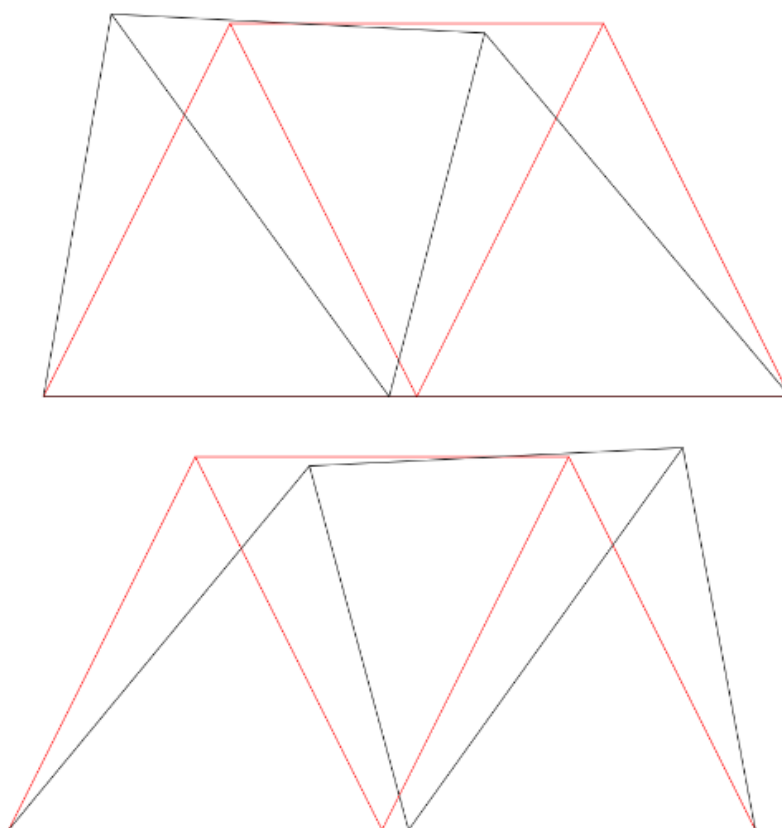
FIGURA 29– DECAIMENTO DE ω_2 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE.

Embora o elemento L_4 (em vermelho na figura 29) contribua mais para a convergência da frequência alvo, como nenhum dos valores do indicador dos sete

elementos tende para zero, não se pode deixar de enriquecer nenhum dos elementos da malha quando ω_2 é a frequência alvo.

O segundo modo de vibração encontrado com o MEF (6 G.L.) e com o MEFG (34 G.L.) é ilustrado na figura 30, onde observa-se que este modo não é simétrico.

FIGURA 30 – SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO ENCONTRADO COM O MEF (6 G.L.) E COM O MEFG (34 G.L.).



5.4.3 FREQUÊNCIA ALVO ω_3

Os indicadores de Friberg e as aproximações para a terceira frequência ao se aplicar o MEFG local são apresentados no quadro 20, lembrando que a aproximação encontrada com o MEF linear foi de $\omega_3 = 3341,3752$.

QUADRO 20 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL E INDICADOR DE FRIBERG PARA ω_3 – TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	η_i	$\omega_3(\text{MEFG})$
L_1	0,0320	3290,3612
L_2	0,0156	3315,3155
L_3	0,0391	3287,7435
L_4	0,0062	3332,5257
L_5	0,0391	3287,7435
L_6	0,0156	3315,3155
L_7	0,0320	3290,3612

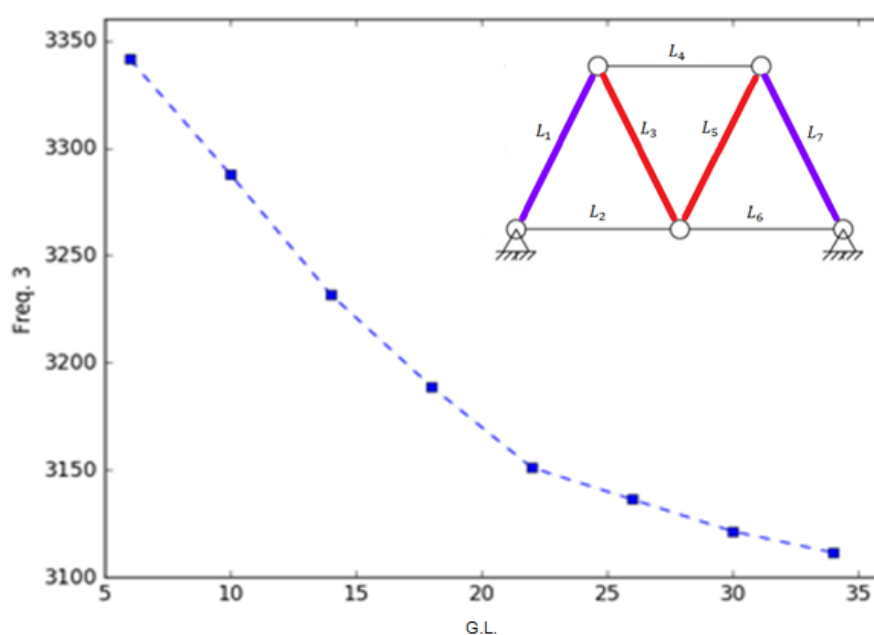
Quando o elemento L_3 ou o elemento L_5 , é enriquecido, obtém-se a melhor das aproximações dentre as sete apresentadas, que é de $\omega_3 = 3287,7435$. Sendo que quando o elemento L_4 é enriquecido, obtém-se a pior das aproximações. Assim pode-se afirmar que os elementos L_3 e L_5 contribuem mais para a convergência da aproximação e que o elemento L_4 é o que menos influencia. Também é possível notar que a aproximação obtida ao se enriquecer o elemento L_1 ou L_7 é próxima da obtida ao enriquecer o elemento L_3 ou L_5 . Poderia se chegar às conclusões anteriores apenas se observando os valores do indicador que Friberg, sem precisar resolver o sistema com 10 graus de liberdade sete vezes, pois este representa corretamente a contribuição que cada elemento possui no enriquecimento local.

Então o MEFG é aplicado em todos os elementos da malha, seguindo a ordem decrescente do indicador e sempre que um novo elemento é enriquecido, solucionase o sistema para analisar o efeito do enriquecimento do novo elemento para a aproximação da frequência alvo. Os resultados estão no quadro 21.

QUADRO 21 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA ω_3 – TRELIÇA PLANA.

Elementos Enriquecidos	ω_3 (MEFG)
L_3	3287,7435
L_3, L_5	3231,7513
L_3, L_5, L_1	3188,9334
L_3, L_5, L_1, L_7	3151,1212
L_3, L_5, L_1, L_7, L_2	3136,3421
$L_3, L_5, L_1, L_7, L_2, L_6$	3121,4522
Todos	3111,5250
MEF- p (77 G.L.)	3111,3227

Observa-se que neste caso também não se pode deixar de enriquecer nenhum dos elementos da malha, pois todos eles apresentam um valor relativamente próximo para o indicador de Friberg e contribuem para a convergência da aproximação. O decaimento da aproximação para ω_3 pode ser relacionada com o aumento do número de graus de liberdade. Este resultado é apresentado na figura 31.

FIGURA 31– DECAIMENTO DE ω_3 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE.

A convergência da frequência alvo é maior quando os elementos em vermelho da figura 34 são enriquecidos, seguido pelo enriquecimento dos elementos em lilás.

5.4.4 Frequência Alvo ω_4

Os indicadores de Friberg e as aproximações para a quarta frequência ao se aplicar o MEFG local são apresentados no quadro 22, onde a aproximação encontrada com o MEF linear foi de $\omega_4 = 5174,3538$.

QUADRO 22 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA ω_4 – TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	η_i	$\omega_4(\text{MEFG})$
L_1	0,0597	4982,0062
L_2	0,1304	4928,2373
L_3	0,0186	5137,2190
L_4	0,0104	5156,6270
L_5	0,0186	5137,2190
L_6	0,1304	4928,2373
L_7	0,0597	4982,0062

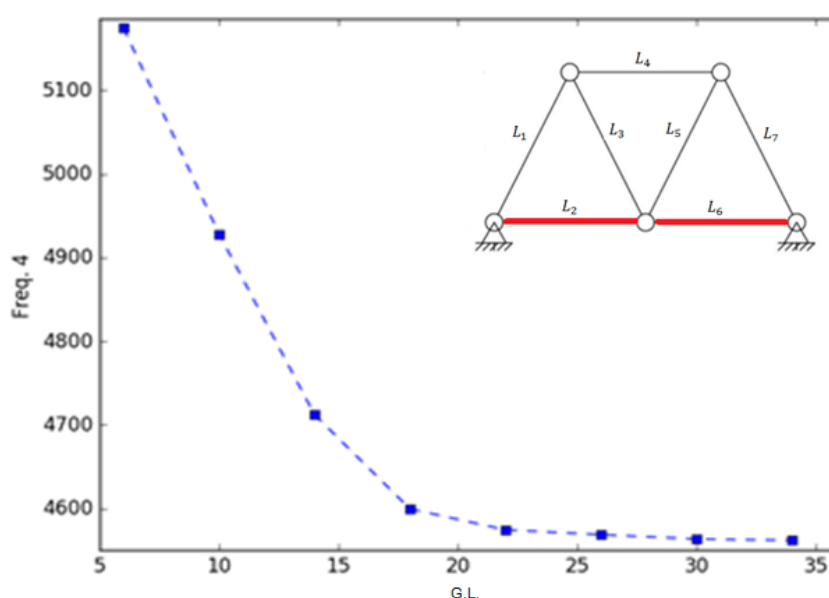
Pode notar-se que o elemento L_2 e o elemento L_6 são os que mais influenciam na convergência da aproximação de ω_4 quando o MEFG é aplicado localmente, gerando uma aproximação para a quarta frequência de $\omega_4 = 4928,2373$. Já o enriquecimento do elemento L_4 é o que resulta na pior aproximação para a frequência alvo. É importante ressaltar que esses elementos não teriam essa influência se qualquer uma das outras cinco primeiras frequências fosse adotada como a frequência alvo. Observa-se também que novamente o indicador de Friberg mostra perfeitamente a importância de cada elemento no processo de aproximação.

Então o MEFG é aplicado em todos os elementos, com enriquecimento seguindo a ordem decrescente do indicador. Os resultados são apresentados no quadro 23.

QUADRO 23 – RESULTADOS DO MEFG EM VÁRIOS ELEMENTOS PARA ω_4 – TRELIÇA PLANA.

Elementos Enriquecidos	ω_4 (MEFG)
L_2	4928,2373
L_2, L_6	4712,1188
L_2, L_6, L_1	4599,4703
L_2, L_6, L_1, L_7	4574,4289
L_2, L_6, L_1, L_7, L_3	4568,6705
$L_2, L_6, L_1, L_7, L_3, L_5$	4563,4136
Todos	4561,8197
MEF-p(77 G.L.)	4561,8173

Todos os elementos da malha contribuem para a convergência da aproximação, então não se pode deixar de enriquecer nenhum deles, embora de acordo com o que foi visto, cada elemento contribui de forma diferente. A relação entre o decaimento da frequência alvo e o aumento do número de graus de liberdade é apresentada na figura 32.

FIGURA 32– DECAIMENTO DE ω_4 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE.

Mais uma vez observa-se que a convergência é maior quando os elementos com maior valor do indicador Friberg são enriquecidos e onde os valores são menores, a convergência também é menor.

5.4.5 Frequência Alvo ω_5

Os indicadores de Friberg e as aproximações para a quinta frequência ao se aplicar o MEFG local são apresentados no quadro 24, onde a aproximação encontrada com o MEF linear foi de $\omega_5 = 5678,1845$.

QUADRO 24 – RESULTADOS MEFG LOCAL PARA ω_5 – TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	η_i	$\omega_5(\text{MEFG})$
L_1	0,3149	5388,7857
L_2	6,6969e-32	5678,1845
L_3	0,0463	5601,9137
L_4	0,0130	5640,8627
L_5	0,0463	5601,9137
L_6	6,6969e-32	5678,1845
L_7	0,3149	5388,7857

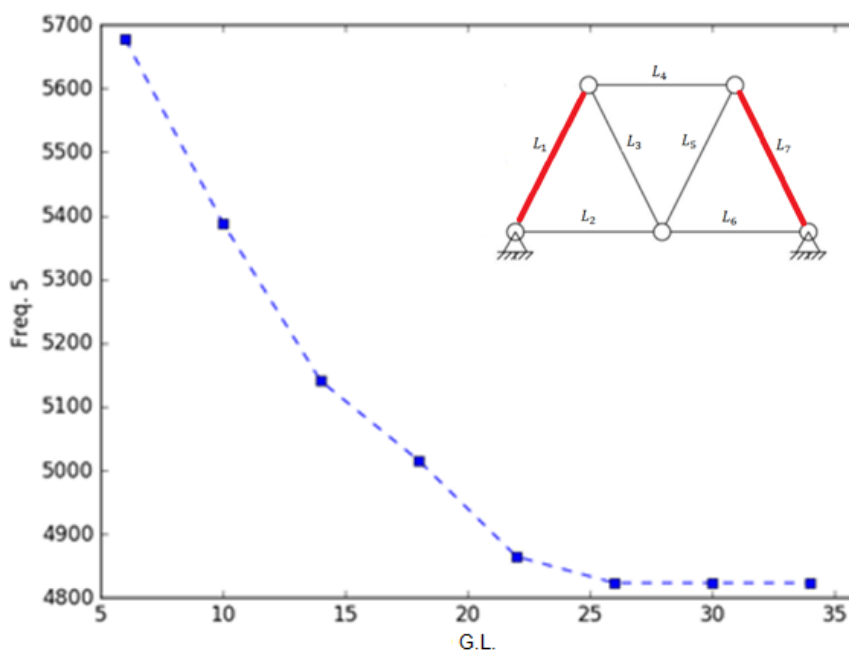
O elemento L_7 e o elemento L_1 são os que influenciam mais na convergência da frequência alvo quando o MEFG é aplicado. Porém quando o elemento L_2 ou L_6 é enriquecido não acontece nenhuma mudança na frequência alvo, esta característica é prevista pelo indicador de Friberg, apresentando um valor muito próximo de zero.

Depois o MEFG é aplicado em todos os elementos, seguindo a ordem decrescente do indicador, ou seja, L_1 , L_7 , L_3 , L_5 , L_4 , L_2 e L_6 . Os resultados encontram-se no quadro 25.

QUADRO 25 – RESULTADOS DO MEFG PARA ω_5 – TRELIÇA PLANA.

Elementos Enriquecidos	ω_5 (MEFG)
L_1	5388,7857
L_1, L_7	5140,5709
L_1, L_7, L_3	5075,5806
L_1, L_7, L_3, L_5	4916,5942
L_1, L_7, L_3, L_5, L_4	4823,2535
$L_1, L_7, L_3, L_5, L_4, L_2$	4823,2535
Todos	4823,2535
MEF-p (77 G.L.)	4823,2486

A relação entre a convergência da aproximação e o aumento do número de graus de liberdade é apresentada na figura 33.

FIGURA 33 – DECAIMENTO DE ω_5 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE.

Constata-se tanto pelo quadro 25 quanto pela figura 33 que os elementos L_6 e L_2 não contribuem para a convergência da aproximação da frequência alvo e como esperado apresentam valores do indicador de Friberg extremamente pequenos.

Logo, estes dois elementos não precisam ser enriquecidos, pois sua contribuição é insignificante para a convergência da solução. Portanto, para a aproximação de ω_5 pode-se resolver um sistema com apenas 26 graus de liberdade, ou seja, há uma redução de aproximadamente 23,6% no tamanho geral do sistema em relação ao sistema do MEFG convencional que possui 34 graus de liberdade.

5.4.6 Frequência Alvo ω_6

Os indicadores de Friberg e as aproximações para a sexta frequência ao se aplicar o MEFG localmente são apresentados no quadro 26, onde a aproximação encontrada com o MEF Linear foi de $\omega_6 = 8315,4006$.

QUADRO 26 – RESULTADOS DO MEFG LOCAL PARA ω_6 – TRELIÇA PLANA.

Elemento Enriquecido	η_i	$\omega_6(\text{MEFG})$
L_1	0,0090	8291,1893
L_2	3,9874e-33	8315,4006
L_3	0,0896	8015,9134
L_4	0,0986	7988,4655
L_5	0,0896	8015,9134
L_6	3,9874e-33	8315,4006
L_7	0,0090	8291,1893

Neste caso, o elemento L_4 é o que mais influencia na convergência da aproximação quando o MEFG é aplicado localmente, mas há de se notar que a frequência obtida quando é enriquecido o elemento L_3 ou L_5 apresenta uma precisão um pouco menor mas também é muito boa, sendo que o indicador de Friberg consegue descrever corretamente esta relação. Já com o enriquecimento do elemento L_2 ou L_6 , a aproximação apresenta baixa precisão, comportamento esse apontado pelo indicador de Friberg, que nestes elementos é muito próximo de zero.

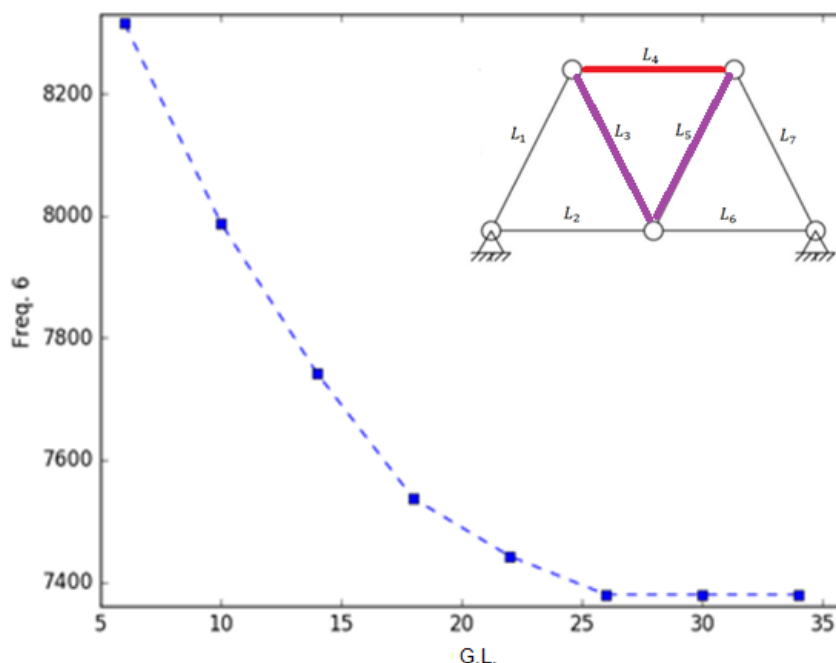
Em seguida, o MEFG é aplicado em todos os elementos, respeitando a ordem decrescente do indicador, ou seja, L_4 , L_3 , L_5 , L_1 , L_7 , L_2 e L_6 . Os resultados são apresentados no quadro 27.

QUADRO 27 – RESULTADOS DO MEFG PARA ω_6 – TRELIÇA PLANA.

Elementos Enriquecidos	ω_6 (MEFG)
L_4	7988,4655
L_4, L_3	7742,1059
L_4, L_3, L_5	7536,9306
L_4, L_3, L_5, L_1	7442,4852
L_4, L_3, L_5, L_1, L_7	7379,4824
$L_4, L_3, L_5, L_1, L_7, L_2$	7379,4824
Todos	7379,4824
MEF- p (77 G.L.)	7379,4823

Os resultados mostram que a solução aproximada apresenta convergência maior quando os três primeiros elementos são enriquecidos, pois estes apresentam os maiores valores para o indicador de Friberg. Porém ao realizar o enriquecimento dos elementos L_2 e L_6 a aproximação não apresenta melhora, lembrando que estes apresentam valores muito pequenos para o indicador de Friberg. A convergência de ω_6 também pode ser observada na relação entre o decaimento da frequência aproximada e o aumento no número de graus de liberdade, observada na figura 34.

FIGURA 34 – DECAIMENTO DE ω_6 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE.



Para a determinação desta frequência alvo pode-se resolver um sistema com apenas 26 graus de liberdade, ou seja, há novamente uma redução de aproximadamente 23,6% no tamanho geral do sistema em relação ao sistema do MEFG convencional que possui 34 graus de liberdade, mantendo a mesma solução. A aproximação de ω_6 com 26 graus de liberdade é bem próxima da aproximação obtida com o MEF- p com 77 graus de liberdade apresentada por Cittadin (2017).

5.4.7 Considerações Sobre Treliça Plana

Uma das principais contribuições do uso do indicador de Friberg no MEFG se deve ao fato de que ao se escolher uma das frequências obtidas via MEF como alvo e aplicar o MEFG localmente, o estimador consegue prever quais são os elementos mais importantes para a frequência escolhida, sem a necessidade de resolver o sistema.

Ao saber qual elemento ou quais elementos contribuem mais para a convergência da aproximação, torna-se possível priorizar estes elementos e selecionar regiões de interesse. A atenção maior deve ser dada a essas regiões, pois elas influenciam mais na obtenção da frequência alvo, pode-se aumentar o

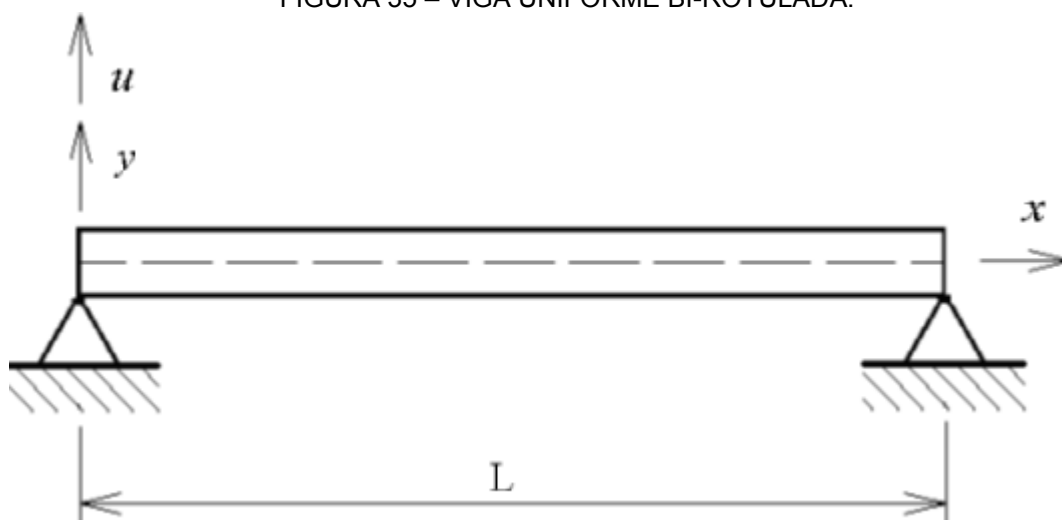
espaço de funções aproximadoras próximo a essas regiões, ou até mesmo realizar um refino seletivo na malha, desse modo a aproximação tende ser mais precisa com um custo computacional menor.

Se esse procedimento for aplicado em sistemas reais, onde a complexidade dos problemas é maior, ou seja, o número de graus de liberdade é elevado e o custo computacional é algo a se levar em conta, o uso do indicador pode reduzir a dimensão dos sistemas utilizados, e consequentemente o custo computacional. Ainda pode haver uma diminuição do número de condição das matrizes de massa e rigidez, tornando o problema mais estável numericamente.

5.5 Viga de Euler-Bernoulli Bi-Rotulada

Analisa-se agora o problema de determinar as frequências naturais de vibração de uma viga de Euler-Bernoulli uniforme e bi-rotulada (figura 35), encontrada em Arndt (2009), com as seguintes características: comprimento $L = 1,0 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 1,0 \text{ N/m}^2$, massa específica $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$, momento de inércia $I = 1,0 \text{ m}^4$ e área da seção transversal $A = 1,0 \text{ m}^2$.

FIGURA 35 – VIGA UNIFORME BI-ROTULADA.



FONTE: Arndt (2009).

Inicialmente aplica-se o MEF com um elemento e funções de forma cúbicas e ao aplicar as condições de contorno no sistema global 4x4, tem-se um novo

sistema restringido de dimensão 2x2. Ao solucionar esse sistema são encontradas aproximações iniciais para as duas primeiras frequências ω_1 e ω_2 . A solução analítica para as frequências naturais (ω_i) e os modos naturais de vibração (u_i) encontram-se em Arndt (2009), sendo:

$$k_i = \frac{i\pi}{L} \quad , i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.1)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \cdot k_i^4} \quad (5.5.2)$$

$$u_i(x) = c \cdot \text{sen}(k_i x) \quad , i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5.3)$$

onde c é uma constante.

Também é possível calcular o erro relativo considerando quatro casas decimais, de acordo com o quadro 28.

QUADRO 28 – RESULTADOS DO MEF VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.

Frequência	MEF	Analítico	Erro Relativo
ω_1	10,9544	9,8696	11%
ω_2	50,1996	39,4784	27%

Observa-se que os resultados encontrados via MEF apresentam um erro relativo significativo. Dessa forma, com o objetivo de reduzir o erro e obter melhores aproximações para as duas frequências, aplica-se o MEFG MMA detalhado em Arndt (2009), com sete níveis de enriquecimento, gerando um sistema restringido de dimensão 16x16. Solucionando esse novo sistema encontram-se os resultados apresentados no quadro 29.

QUADRO 29 – RESULTADOS DO MEFG VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.

Frequência	MEFG- MMA	Analítico	Erro Relativo
ω_1	9,8696	9,8696	0%
ω_2	39,4784	39,4784	0%

Percebe-se que o MEFG MMA com 16 graus de liberdade se mostrou eficiente, pois as aproximações coincidiram com a solução analítica.

Então adota-se o sistema inicial de dimensão 2×2 correspondente ao MEF, com $[K]_{n \times n} = [K]_{2 \times 2}$ e $[M]_{n \times n} = [M]_{2 \times 2}$. Como neste caso, o incremento de cada nível do enriquecimento do MEFG MMA provoca um aumento de duas linhas e duas colunas no sistema inicial, considera-se esse incremento como sendo $[K]_{m \times n}$, $[K]_{m \times m}$ e $[M]_{m \times n}$, $[M]_{m \times m}$.

Esse procedimento apresentará a influência de cada nível na convergência da aproximação, sem a necessidade é claro de solucionar o novo sistema. Porém como se trata de um exemplo para a validação numérica, o novo sistema é solucionado sempre que um novo grau de liberdade é acrescentado.

Escolhendo a primeira frequência ω_1 como frequência alvo para o cálculo do indicador, têm-se os resultados apresentados no quadro 30.

QUADRO 30 – RESULTADOS DO INDICADOR PARA ω_1 – VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.

Níveis	G.L.	η_i	ω_1	Erro Relativo
1	3	0,1622	10,2626	3,9748%
	4	0,3023	9,8703	0,0079%
2	5	0,3026	9,8696	0,0000%
	6	0,3026	9,8696	0,0000%
3	7	0,3026	9,8696	0,0000%
	8	0,3026	9,8696	0,0000%
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
7	15	0,3026	9,8696	0,0000%
	16	0,3026	9,8696	0,0000%

A solução aproximada coincide com a solução analítica 9,8696 quando o quinto grau de liberdade é acrescentado. Esta tendência é equivalente à apresentada pelo indicador de Friberg, pois este convergiu para o valor de 0,3026 assim que o quinto grau de liberdade foi inserido, demonstrando que não haveria uma melhora significativa no valor da aproximação de ω_1 com o acréscimo de mais graus de liberdade (mais níveis de enriquecimento). Este resultado também é comprovado graficamente ao observar as figura 36 e figura 37.

GRÁFICO 36 – COMPORTAMENTO DE ω_1 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE – VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.

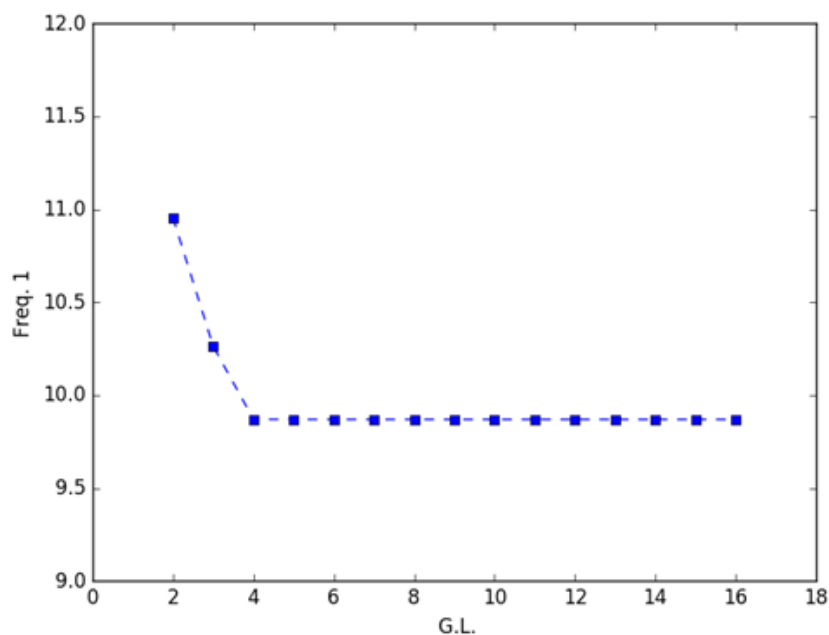
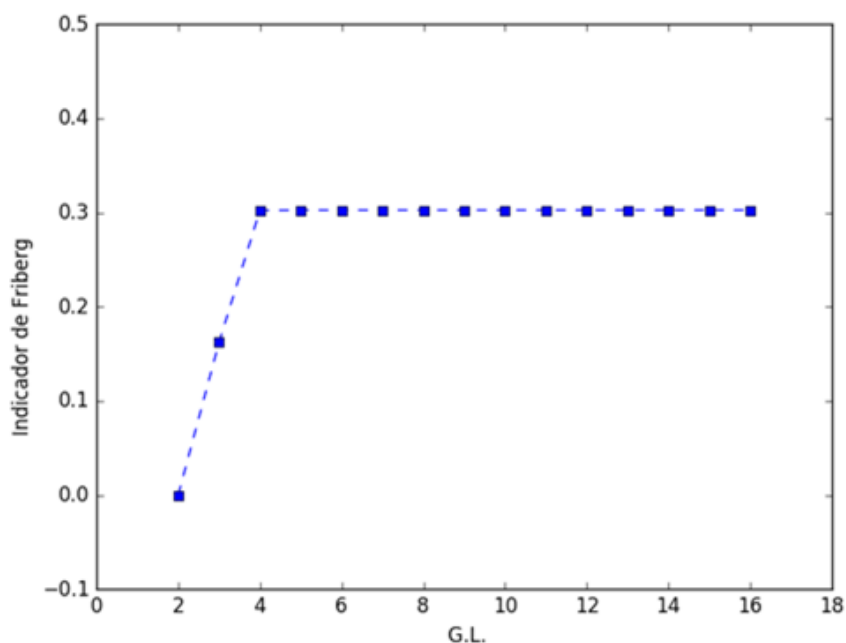


GRÁFICO 37 – COMPORTAMENTO DO INDICADOR COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE PARA ω_1 – VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.



Portanto, é necessário um sistema de dimensão 5x5 para determinar ω_1 com a precisão de quatro casas decimais, gerando uma redução do sistema global de 68,75%, em relação ao sistema de dimensão 16x16 com sete níveis de enriquecimento e esta redução pode ser alcançada com o uso do indicador.

O procedimento anterior também pode ser realizado alterando-se a frequência alvo para ω_2 , onde o indicador projeta a variação da segunda frequência

provocada pelo acréscimo de cada grau de liberdade correspondente aos níveis de enriquecimento do MEFG. Os resultados encontram-se no quadro 31

QUADRO 31 – RESULTADOS DO INDICADOR PARA ω_2 – VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.

Níveis	G.L.	η_i	ω_2	Erro Relativo
1	3	0,1054	45,2225	14,5499%
	4	1,6882	39,5273	0,1238%
2	5	1,6904	39,5253	0,1187%
	6	1,7402	39,4788	0,0010%
3	7	1,7402	39,4787	0,0007%
	8	1,7403	39,4784	0,0000%
4	9	1,7403	39,4784	0,0000%
	10	1,7403	39,4784	0,0000%
.
.
.
7	15	1,7403	39,4784	0,0000%
	16	1,7403	39,4784	0,0000%

A aproximação para ω_2 coincidiu com a solução analítica 39,4784 *rad/s* quando o sistema 8x8 (3 níveis de enriquecimento) foi solucionado, sendo que este resultado foi apontado pelo indicador de Friberg, uma vez que este também convergiu para 1,7403 depois que o oitavo grau de liberdade foi inserido. Esse resultado também pode ser observado na figura 38 e figura 39.

FIGURA 38 – COMPORTAMENTO DE ω_2 COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE – VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.

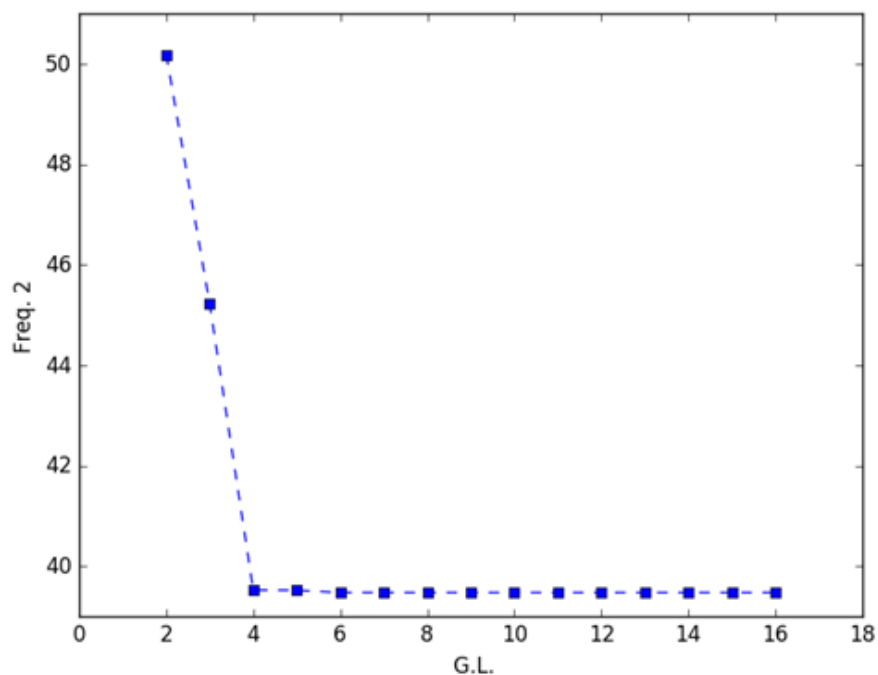
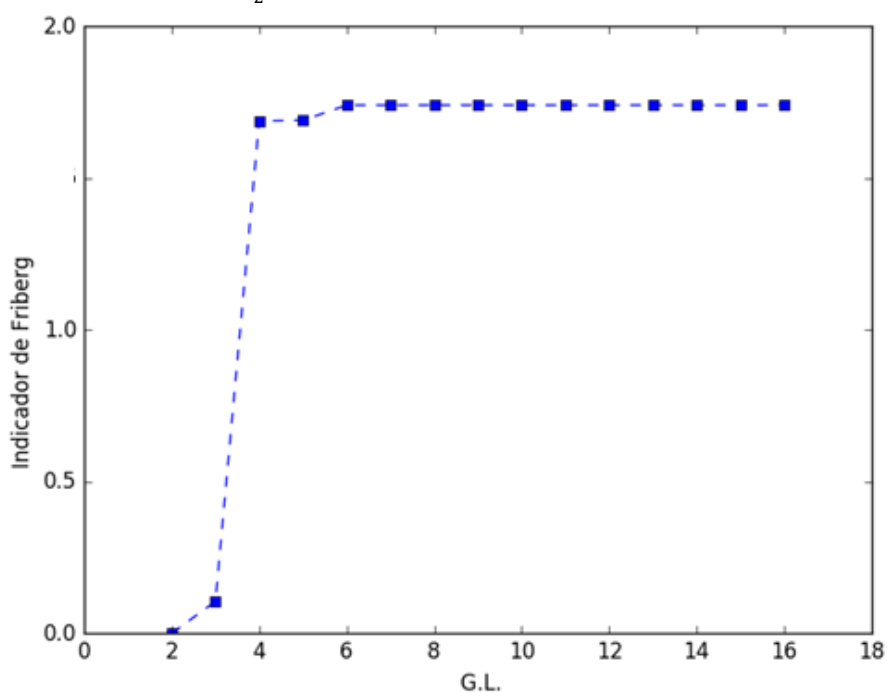


FIGURA 39 – COMPORTAMENTO DO INDICADOR COM O AUMENTO DO NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE PARA ω_2 – VIGA DE EULER-BERNOULLI BI-ROTULADA.



Logo, para obter uma aproximação para ω_2 com quatro casas decimais é necessário resolver um sistema de equações de dimensão 8x8, gerando uma redução de 50 % na dimensão do sistema global quando o MEFG MMA é aplicado

com 7 níveis de enriquecimento, ou seja, em relação ao sistema de dimensão 16×16 .

Na análise das duas primeiras frequências verifica-se que as perturbações geradas na precisão da solução, pelo acréscimo de novos graus de liberdade de campo vindos do MEFG MMA, são representadas corretamente pelos valores do indicador de Friberg. Isto verifica a eficácia do indicador, pois quanto maior é o valor do indicador, maior será a melhora na precisão da frequência alvo.

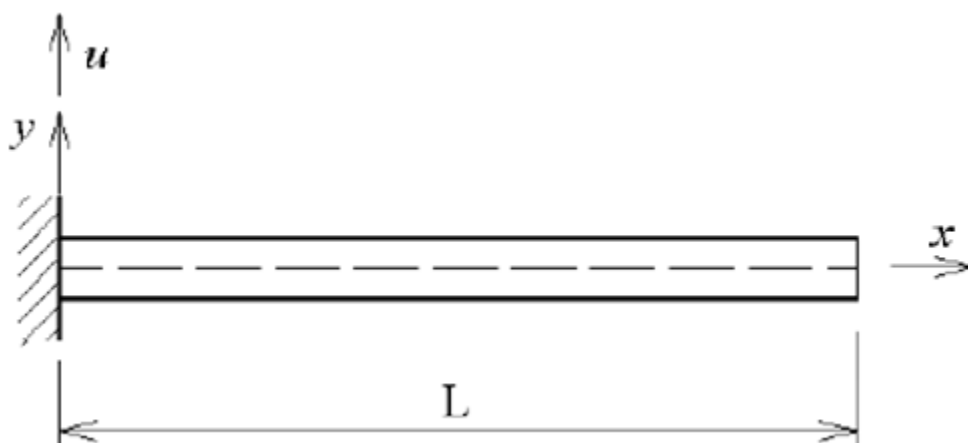
Comumente o usuário vai inserindo mais níveis de enriquecimento e resolvendo o sistema, até que a aproximação chegue próxima da convergência. Com a utilização do indicador proposto pode-se estimar a melhora da aproximação com a inserção de novos graus de liberdade antes da resolução do problema de autovalores do sistema enriquecido.

Como nesta simulação numérica foi utilizado apenas um elemento, o aumento na dimensão dos sistemas de n para $n + m$ é provocado pelo acréscimo de mais níveis de enriquecimento do MEFG. O indicador se mostrou capaz de indicar em qual ponto do enriquecimento a convergência é atingida, o que pode gerar um ganho computacional considerável em alguns casos e também comparar diferentes formas de enriquecimento.

5.6 Viga de Euler-Bernoulli Engastada-Livre

Analisa-se um caso de viga de Euler-Bernoulli engastada-livre (figura 40), com as seguintes características são: comprimento $L = 1,0 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 1,0 \text{ N/m}^2$, massa específica $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$, momento de inércia $I = 1,0 \text{ m}^4$ e área da seção transversal $A = 1,0 \text{ m}^2$.

FIGURA 40 – VIGA UNIFORME ENGASTADA-LIVRE.



FONTE: Arndt (2009).

A solução analítica para as frequências naturais de vibração é apresentada por Arndt (2009), obtida pela solução da equação característica:

$$\cos(\kappa_r L) \cosh(\kappa_r L) + 1 = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6.1)$$

$$\kappa_r = \sqrt[4]{\frac{\omega_r \rho A}{EI}} \quad (5.6.2)$$

A viga é discretizada por uma malha com um elemento, na qual aplica-se o MEF com dois graus de liberdade. As aproximações para as duas primeiras frequências naturais e a solução analítica que é calculada pelas equações (5.6.1) e (5.6.2) são apresentadas no quadro 32.

QUADRO 32 – RESULTADOS DO MEF PARA VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA-LIVRE.

Frequência	MEF	Analítico	Erro Relativo
ω_1	3,5327	3,5160	0,47%
ω_2	34,8068	22,0344	57,96%

Novamente o maior erro relativo é encontrado na aproximação da frequência mais elevada, portanto ω_2 é escolhida como frequência alvo para o cálculo do

indicador. Então o MEFG é aplicado com cinco níveis de enriquecimento e os resultados são apresentados no quadro 33.

QUADRO 33 – RESULTADOS DO MEFG E INDICADOR DE ERRO DE FRIBERG PARA VIGA DE EULER-BERNOULLI ENGASTADA-LIVRE.

Níveis de Enriquecimento	η_i	$\omega_2(\text{MEFG})$	G.L.
1	-0,9544283	22,054143	4
2	-0,9507400	22,035118	6
3	-0,9504600	22,034503	8
4	-0,9504508	22,034494	10
5	-0,9504503	22,034491	12

Conforme os novos níveis de enriquecimento são inseridos, a aproximação de ω_2 converge para a solução analítica apresentada no quadro 32. Novamente há uma convergência do indicador de erro de Friberg, quando o refinamento p é aplicado.

Este resultado reforça a hipótese de utilizar o indicador de Friberg quando vários níveis de enriquecimento do MEFG são inseridos, uma vez que a convergência do indicador implica na convergência da frequência alvo.

6 CONCLUSÕES

Os resultados alcançados com a utilização do indicador de erro de Friberg foram satisfatórios, uma vez que em alguns casos é possível obter aproximações com taxas de convergência muito semelhantes e com menor custo computacional, observando apenas quais os elementos que fazem com que erro de uma determinada frequência alvo diminua. Este procedimento provou ser eficiente para exemplos simples, porém pode ser estendido para análise de estruturas de engenharia mais complexas.

Na prática, o uso de MEFG seletivo pode gerar reduções interessantes no tamanho do sistema global, uma vez que o indicador apontará as regiões da malha que proporcionam maior convergência se forem enriquecidas. Como o enriquecimento do MEFG aumenta o número de condição da matriz de massa, que vem a ser indicador de estabilidade numérica do problema (PETROLI, 2016), ao reduzir a dimensão da matriz de massa, o problema tende a ficar mais bem condicionado.

Com a aplicação do indicador de Friberg combinado com o MEFG na análise dinâmica de estruturas, pode-se encontrar qual o elemento que contribui mais para a precisão da solução dos problemas envolvendo barras e treliça. Sendo que diferentes malhas foram utilizadas para a discretização do mesmo problema e o indicador se adaptou a cada uma delas.

Realizou-se também a averiguação de quantos níveis de enriquecimento são necessários para que a solução do problema produza aproximações convergentes. Novamente o indicador de Friberg se mostrou eficiente para tal. Possibilitando assim analisar problemas com uma grande quantidade de níveis de enriquecimento, sendo solucionado somente o problema com um número mínimo de níveis necessários para a convergência do indicador de Friberg.

Outras abordagens podem ser propostas, utilizando o indicador de Friberg para diferentes problemas da dinâmica e combinando com diferentes propostas de enriquecimento.

O indicador de Friberg pode ser aplicado em diferentes métodos enriquecidos, desde que estes sejam hierárquicos, como por exemplo: o Método Composto, Método dos Modos Admissíveis, Método dos Elementos Finitos p-Fourier, Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável, entre outros.

A abordagem apresentada neste trabalho pode trazer contribuições na aplicação em problemas mais robustos, como problemas de pórtico, estado plano e propagação de trincas, bidimensionais e tridimensionais. Nestes problemas mais complexos o indicador de erro de Friberg pode ser usado para investigar a existência de contribuições diferentes para regiões distintas da malha.

REFERÊNCIAS

- ALVES, P. D.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S. **An object-oriented approach to the generalized finite element method**. Advances in Engineering Software, Vol. 59, p. 1–18, 2013.
- ARNDT M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizado Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Estruturas Reticuladas**. Tese de doutorado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; SCREMIN, A. **An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses**. Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, p. 659-672, 2010.
- AUGARDE, C. E. **Generation of shape functions for straight beam elements**. Computers and Structures, Vol. 68, p. 555-560, 1998.
- BABUSKA, I.; BANERJEE U. **Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM)**. Computer methods in applied mechanics and engineering. Vol. 201–204, p. 91–111, 2012.
- BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.C. **A-posteriori error estimates for the Finite Element Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 12, p. 1597-1615, 1978.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. **Análise Numérica**. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2008.
- BELYTSCHKO T.; CHEN, H.; XU, J.; ZI, G. **Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 58, p. 1873-1905, 2003.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. **Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, p. 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. **A review of extended/generalized finite element methods for material modeling**. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, Vol. 17, p. 1–25, 2009.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. **On XFEM applications to dislocations in problems with interfaces**. International Journal of Plasticity, Vol. 23, p. 1721-1738, 2007.
- BORDAS, S.; DUFLLOT, M.; Le, P. **A simple error estimated for extended finite elements**. Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, p. 961–971, 2008.
- CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements**. Vol. 2, Prentice-Hall, New Jersey, 1984. ISBN 9780133170573.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering**. Ed. 4, University of California at Berkeley, 2012, ISBN: 978-0132858038.

CITTADIN, C. C. **Refinamento p do método dos Elementos Finitos para análise de vibração de treliças**. Relatório de iniciação científica PIBIC, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

CRAIG, R. R. **Structural dynamics: an introduction to computer methods**. New York: John Wiley, 1981.

CUSTÓDIO, R.; ARNDT, M. **The generalized finite element method applied in free vibration analysis under plane stress**. XXXVIII Ibero - Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, 2017.

DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. **The Generalized Finite Element Method Applied to Dynamic Transient Analysis**. International Congress of Mechanical Engineering – COBEM, Curitiba, 2017.

DUARTE C. A. **A Generalized Finite Element Method for Multiscale Simulations**. University of Illinois at Urbana-Champaign 2122 Newmark Lab., MC-250 205 N. Mathews Av. Urbana, IL 61801. 2012.

DUARTE H. V. **Estimador de Erro para a Formulação p do Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**. Tese de doutorado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

DUARTE, C. A.; BABUSKA I.; ODEN J. T. **Generalized finite methods for tree-dimensional structural mechanics problems**. Computers & Structures, Elsevier, Vol. 77, p. 215-232, 2000.

DUARTE, C. A.; KIM, D. J. **Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions**. Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 197, p. 487–504, 2008.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. **An h-p adaptive method using clouds**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, p. 237–262, 1996.

FERREIRA, I. P.; BARROS F. B.; GRECO, M. **Estimadores de erro baseados no subdomínio e no elemento para o MEFG aplicado à análise não linear de estruturas de concreto**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, 2016.

FREISLEBEN, P. L. M.; ARNDT, M.; WEINHARDT, P. O.; MACHADO, R. D. **Dynamic analysis of Timoshenko beams using the Generalized Finite Element Method**. XXXVIII Ibero - Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, 2017.

FRIBERG, P. O. **An error Indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical Finite Element Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, p. 91-98, 1986.

FRIBERG, P. O., MOLLER, P., MAKOVICKA, D., WEIBERG, N.E., **An adaptive procedure for eigenvalue problems using the hierarchical Finite Element**

Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, p. 319-335. 1987.

FRIES, T. P.; BELYTSCHKO, T. **The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 84, p. 253–304, 2010.

GARCIA, O. A.; ROSSI, R.; LINZMAIER, P. R. **Método de elementos finitos generalizados com alta regularidade na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas.** VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Campina Grande, 2010.

GÓIS, W.; PROENÇA S. P. B. **Método dos Elementos Finitos Generalizados em Formulação Variacional Mista.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, Vol. 10, n. 43, p. 1-32, São Carlos, 2008.

GRACIE, R.; VENTURE, G.; BELYTSCHKO, T. **A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 69, p. 423-441, 2007.

GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; BANERJEE, U. **A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 266 p. 23–39, 2013.

GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUSKA, I.; BANERJEE, U. **Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 289, p. 355–386, 2015.

HAGER P.; WEIBERG N. E. **Adaptive eigenfrequency analysis by superconvergent patch recovery.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 176, p. 441-462, 1999.

JASINSKI, M.; ZBOINSKI, G. **On some hp-adaptative Finite Element Method for natural vibrations.** Computer and Mathematics with Applications. Vol. 66, p. 2376-2399, 2013.

JIN, Y.; GONZALEZ, O.A.; PIERARD, O.; BORDAS, S.P.A. **Error-controlled adaptive extended finite element method for 3D linear elastic crack propagation.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, p. 319–348, 2017.

LARSSON, R.; MEDIAVILLA, J.; FAGERSTROM, M. **Dynamic fracture modeling in shell structures based on XFEM.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 86, p.499–527, 2011.

LEITE S. A. **Método de Elementos Espectrais para a equação da onda com coeficientes variáveis.** Tese de doutorado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

LINS R. M. **Estimador de erro a posteriori baseado em recuperação do gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados.** Dissertação de mestrado – Universidade São Paulo, São Carlos, 2011.

LINS, R. M.; FERREIRA M. D. C.; PROENÇA, S. P. B.; DUARTE C. A. **An a-posteriori error estimator for the Stable Generalized/Extended Finite Element Method**. XXXVIII Ibero - Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, 2017.

LIU, Z.L.; MENOILLARD, T.; BELYSCHKO, T. **An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation**. International Journal of Fracture, Vol.169, p. 183–198, 2011.

MALACARNE, M. F.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D., WEINHARDT, P. O., PETROLI, T., **Adaptative Enrichment of the Generalized Finite Element Method Based on the Friberg Error Indicator**. ABCM International Congress of Mechanical Engineering, Curitiba, 2017- c.

MALACARNE, M. F.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. O.; **Free Vibration Analysis of Trusses Applying the Generalized Finite Element Method with a Selective Mesh Enrichment**. XXXVIII Ibero- Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, 2017- a.

MALACARNE, M. F.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. O.; PETROLI, T. **Formulação do Indicador de Friberg Aplicado ao Método dos Elementos Finitos Generalizados**. II Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR, Curitiba, 2017- b.

MALEKAN, M.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S.; ALVES, P. D.; PENNA, S. S. **A computational framework for a two-scale generalized/extended finite element method: generic imposition of boundary conditions**. Engineering Computations, Vol. 34. p. 988–1019, 2016.

MARCHI, C. H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**, Tese Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD**. Tese de doutorado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. **The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications**. Institute for Computational Engineering and Sciences, University of Texas at Austin, Technical report, p. 32, Austin, 1996.

MELENK, J.M. **On Generalized Finite Methods**. Doctoral thesis – University of Maryland, Washington, 1995.

MENDONÇA, P. T. R.; CHAMOIN, L.; BARCELLOS, C. S. **Errors in quantities of interest in the Laminated Plate Bending Problem Using Hierarchic Sets of Basis Functions in GFEM**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, 2016.

OLIVEIRA, T. S.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S.; SILVA, L. L.; SILVEIRA FILHO, N. A. **Análise linear de problemas bidimensionais da mecânica da fratura pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável**. XXXVIII Ibero - Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, 2017.

PETROLI, T. **Condicionamento do problema de autovalores obtido do Método dos Elementos Finitos Generalizados na Dinâmica de Estruturas**. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

PETROLI, T.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. O. **Condicionamento do problema de autovalores obtido do método dos elementos finitos generalizados na dinâmica de estruturas**. XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, 2015-a.

PETROLI, T.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. O. **Condicionamento do problema de autovalores obtido do método dos elementos finitos generalizados na dinâmica de vigas de Euler-Bernoulli**. V Simpósio de Métodos Computacionais da Universidade Federal do Paraná, Vol. 1, p. 402-407, Curitiba, 2015-b.

PETROLI, T.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. O. **Estabilidade de métodos enriquecidos aplicados à análise dinâmica de viga de Euler-Bernoulli**. I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

PIEDEDE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B. **Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses**. Engineering Computations, Vol. 33, p. 806–830, 2016.

PREANGE C.; LOEHNERT S.; WRIGGERS P. **Error estimation for crack simulations using the XFEM**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 91, p. 1459–1474, 2012.

SANTOS, K. F.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S. **Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a problemas de fratura elástica em 3D**. XXXVIII Ibero - Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Florianópolis, 2017.

SANTOS, N. F. **Estudo e controle de vibrações em laje e edifícios**. Dissertação de mestrado – Universidade do Porto, Porto, 2009.

SCHWEITZER, M. A. **Variational Mass Lumping in the Partition of Unity Method**. Journal on Scientific Computing, Vol. 25, p. 1073–1097, 2013.

SHANG, H. Y.; MACHADO, R. D.; ABDALLA FILHO, J. E.; ARNDT, M. **Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by Generalized Finite Element Method**. European Journal of Mechanics, Vol. 62, p. 50–66, 2017.

SHANG, Y. H. **Análise Dinâmica Elastoplástica de Problemas da Mecânica de Sólidos via Métodos Enriquecidos de Elementos Finitos**. Tese de doutorado - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.

SILVA, J. **Análise de estimadores de erro a posteriori aplicados ao Método dos Elementos Finitos utilizando refino h-adaptativo**. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SORIANO, H. U. **Introdução à Dinâmica de Estruturas**. 1ª ed., Vol.1, Elsevier. Rio de Janeiro, 2014. ISBN 9788535251548.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. **The design and analysis of the Generalized Finite Element Method**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 181, p. 43–69, 1998.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. **The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, p. 1-16, 1999.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. **The generalized finite element method**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, p. 4081-4193, 2001.

SZABÓ B.; BABUSKA I. **Finite Element Analysis**. New York: Wiley & Sons, 1991. ISBN 9780471502739.

TORII A. J.; MACHADO R. D. **Structural Dynamic Analysis For Time Response of Bars and Trusses Using the Generalized Finite Element Method**. Latin American Journal of Solids and Structures, Vol. 9, n.3, Rio de Janeiro, 2012.

TORII, A. J. **Análise dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Tese de doutorado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. **GFEM for modal analysis of 2D wave equation**. Engineering Computations, Vol. 32, p. 1779–1801, 2015.

TORRES, D. A. F.; BARCELLOS, C. S.; BARROS, F. B. **On the use of a continuous Strong-form residuum field for estimation in smooth GFEM approximations**. XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, 2016.

WEINHARDT P. O. **Estudo da Estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica**, Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

WEINHARDT, P. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. **GFEM stabilization techniques applied to transient dynamic analysis**. Revista Interdisciplinar de pesquisa em engenharia, Vol. 2, p. 156–170, 2016.

WEINHARDT, P. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado a análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento.** XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, 2015.

WEINHARDT, P. O.; DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. **GFEM stabilization techniques applied to dynamic analysis of non-uniform section bars.** International Symposium on Solid Mechanics – MECSOL, Vol. 1., p. 776-789, Joinville, 2017.

XIAO, Q. Z.; KARIHALOO, B.L. **Implementation on hybrid crack element on a general finite element mesh and in combination with XFEM.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 196, p.1864-1873, 2007.

ZENG, P. **Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C^0 element (bar).** Journal of Sound and Vibration, Vol. 218, n. 4, p. 619-658, 1998(a).

ZENG, P. **Composite element method for vibration analysis of structures, part II: principle and C^1 element (beam).** Journal of Sound and Vibration. Vol. 218, n. 4, p. 659-696, 1998(b).

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method.** London: McGraw-hill, London, 1977.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. **A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, p. 337–357, 1987.